

Para tomar en cuenta el efecto de la masa del resorte debemos modificar nuestro modelo y sumar a la masa colgante m , una masa m_{ef} que represente a la masa efectiva del resorte. Entonces

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m+m_{ef}}{k}}$$

esto es

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{k} + \frac{4\pi^2 m_{ef}}{k}$$

o bien,

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{k} + \beta$$

con,

$$\beta = \frac{4\pi^2 m_{ef}}{k}$$

Si consideramos como variable independiente a m y como dependiente a T^2 , entonces esta ecuación representa una recta donde la pendiente está dada por $4\pi^2/k$.

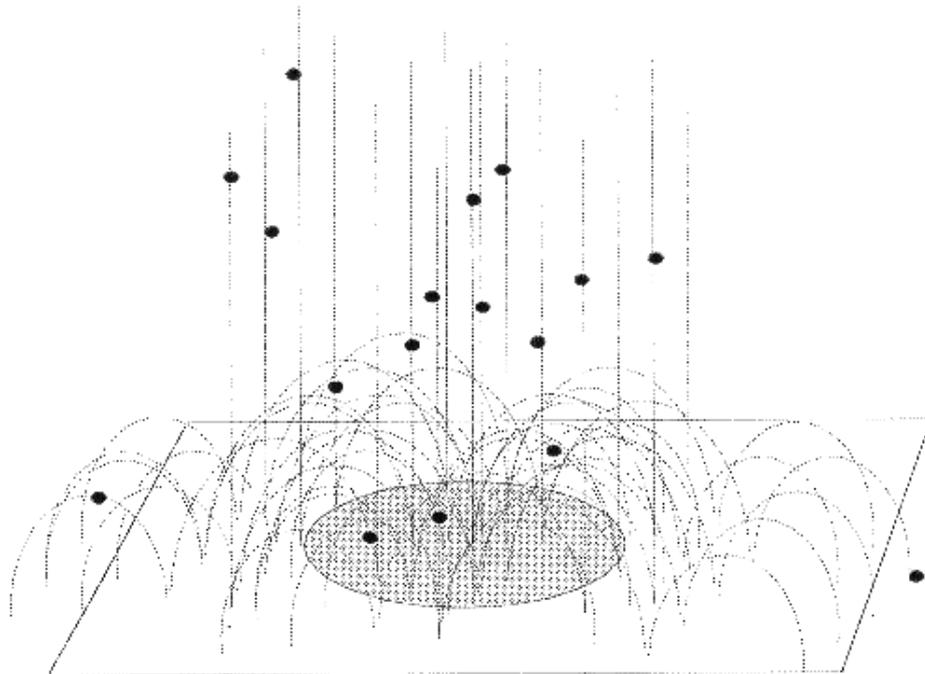
Si contamos con un conjunto de masas m podemos hacer las respectivas mediciones para T y calcular T^2 con lo que podemos hacer la gráfica de m vs. T^2 de donde finalmente obtenemos la pendiente y el valor de β . Esta última cantidad β dividida entre la pendiente nos proporciona el valor de m_{ef} .

El valor de dicha masa m_{ef} comparado con las masas que sujetamos al extremo del resorte nos dan el criterio para menospreciar o no la masa del resorte.

Nota: En este caso a diferencia del problema E1, ("La burbuja de Sandor Nikola") es válida la extrapolación siempre el resultado lo interpretemos adecuadamente.

E4

La figura inferior muestra la idea de solución del problema. Un número grande (~50) de veces las diez canicas son arrojadas desde una altura de uno a dos metros, de manera que sus trayectorias sean aleatorias. Sobre el papel que tiene el círculo dibujado, cuya área debemos determinar, se coloca una hoja de papel carbón de manera que cada vez que una canica haga impacto sobre el papel, la posición del impacto quede marcada sobre el mismo. Es de hacer notar que las canicas al rebotar pueden marcar al papel por segunda ocasión. Esto no implica que la posición de los impactos deje de ser aleatoria ya que las direcciones de los rebotes también lo son.



El siguiente paso es contar el número de impactos sobre toda la hoja de papel. Este número será proporcional al área de la hoja de papel (8.5×11 pulgadas).

Ahora se cuenta el número de impactos dentro del círculo. Una simple regla de tres nos da el área buscada.

Una idea parecida a la que acabamos de presentar fue usada por Rutherford a principios del siglo XX. En este caso sus canicas fueron partículas alfa de gran velocidad. Una partícula alfa es un ión de helio con dos cargas positivas. La hoja de papel de Rutherford fue una delgada laminilla de oro. La información obtenida por este científico lo llevo a su descubrimiento del núcleo atómico (el círculo dibujado en el papel). Las canicas que impactaban dentro del círculo rebotaban y las que lo hacían fuera atravesaban la laminilla de oro. Aquí debemos referir al lector a un buen libro elemental de física moderna. Incidentalmente, queremos comentar que, el término "física moderna" es muy desafortunado ya que describe la física conocida desde hace al menos 80 años.

La manera en que los físicos nucleares investigan los núcleos atómicos es "aventando" proyectiles sobre ellos y observando que pasa.

Como no podemos observar directamente lo muy pequeño una analogía macroscópica podría ser el lanzar pelotas de tenis hacia una pared que no podemos ver. Sin embargo podemos observar como rebotan las pelotas de tenis. Imagine el lector que la pared es la fachada de una catedral barroca. ¿Cómo se compararían los rebotes con los rebotes sobre una pared de un frontón?

No cabe duda que los físicos idean métodos para poder "observar" fenómenos que no ven directamente.

E5

La idea es hacer rodar la pequeña esferita de radio r en la superficie del espejo cóncavo de radio R que queremos determinar. Con esto la esferita oscilará con un período T que está relacionado con R . Midiendo el período de oscilación podremos determinar R . La figura 17 muestra el arreglo experimental.

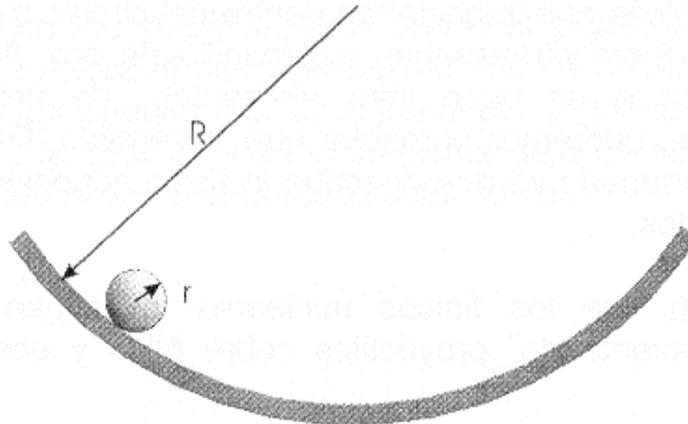


Figura 17

Para poder resolver el problema debemos encontrar la relación entre T y R . Nos valdremos del principio de conservación de la energía. La figura 18 muestra al ángulo θ como aquel que se forma entre la línea OG y la vertical. Suponiendo que la esfera rueda sin deslizarse aplicamos el principio de conservación desde el punto 1 donde $\theta = \theta_m$ y la posición 2 donde $\theta = 0$.

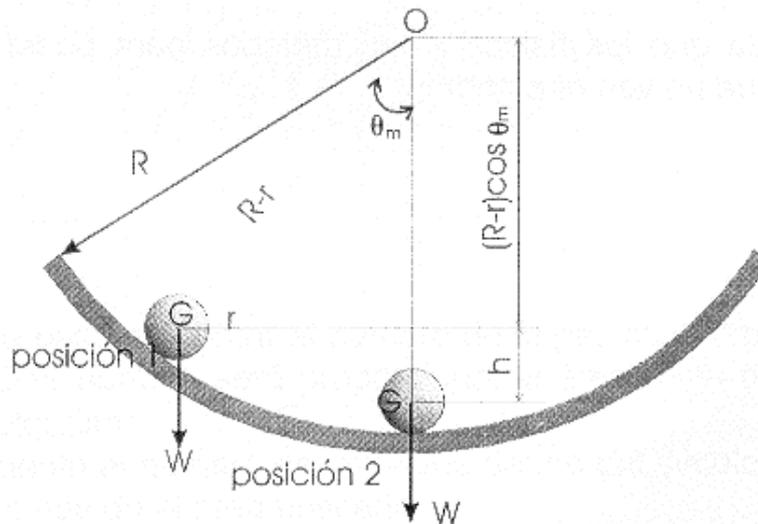


Figura 18

En la posición 1 la energía cinética K es cero puesto que la velocidad de la esferita es cero. Por lo tanto $K_1 = 0$.

Si denotamos al peso de la esfera por W y al cero de energía potencial U lo tomamos desde el centro de la esfera cuando esta se encuentra en la posición 2, se tiene

$$U_1 = Wh = W(R-r)(1 - \cos \theta_m)$$

Considerando que para pequeñas oscilaciones $(1 - \cos \theta) = 2 \sin^2(\theta/2) \approx \theta^2/2$, la expresión anterior se simplifica,

$$U_1 = W(R-r) \frac{\theta_m^2}{2}$$

Cuando la esfera alcanza la posición 2 su energía es solamente cinética. Una parte es debida a la rotación del centro de la esfera alrededor del punto O que corresponde al centro de curvatura del espejo y la otra parte proviene de el movimiento de rotación de la esfera alrededor de su eje instantáneo de rotación. Este último punto se halla marcado con la letra C en la figura 19.

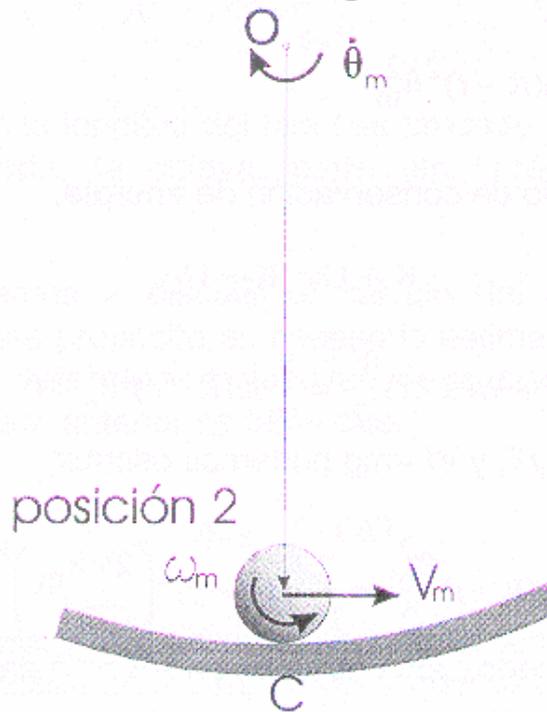


Figura 19

Si denotamos por $\dot{\theta}_m$ la velocidad angular de la línea OG en el momento que la esfera pasa por la posición 2 y observando que el

punto C es el centro instantáneo de rotación de la esfera, entonces podemos escribir,

$$v_m = (R - r)\dot{\theta}_m \quad \omega_m = \frac{v_m}{r} = \frac{R - r}{r} \dot{\theta}_m$$

donde v_m es la velocidad del centro de la esfera y ω_m es la velocidad angular de la esfera girando alrededor de su centro.

La energía cinética total K en la posición 2 es,

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}I\omega_m^2$$

donde $I = \frac{2}{5}mr^2$ es el momento de inercia de la esfera con respecto a su centro. Haciendo las sustituciones apropiadas, la energía cinética total K en la posición 2 resulta ser

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{1}{2}m(R - r)^2\dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{R - r}{r}\right)^2\dot{\theta}_m^2 \\ &= \frac{7}{10}m(R - r)^2\dot{\theta}_m^2 \end{aligned}$$

Utilizando el principio de conservación de energía,

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$0 + W(R - r)\frac{\theta_m^2}{2} = \frac{7}{10}m(R - r)^2\dot{\theta}_m^2 + 0$$

dado que $\dot{\theta}_m = 2\pi\theta_m/T$, y $W = mg$ podemos escribir,

$$mg(R - r)\frac{\theta_m^2}{2} = \frac{7}{10}m(R - r)^2\left(\frac{2\pi\theta_m}{T}\right)^2$$

Finalmente, despejando, encontramos que R está dado por

$$R = \frac{5gT^2}{28\pi^2} + r$$

En este experimento debemos fabricar una escala de medidas misma que se utilizará para determinar: la anchura A , longitud L y altura H del volumen $V = A \times L \times H$ a que debemos calcular.

Con la ayuda de una pesa y un hilo podemos fabricar un péndulo y con el cronómetro podemos medir su período T de oscilación. El péndulo deberá ser lo más largo posible.

El período T esta dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

donde l es la longitud del péndulo y g el valor de la aceleración de la gravedad.

Despejando l obtenemos

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

Una vez obtenida la longitud del hilo l se procede a marcar el hilo por: la mitad, la cuarta, la octava, parte etc., creado así una regla graduada.

Ahora procederemos a discutir el calculo del error al evaluar el volumen. Para este propósito es necesario estimar la precisión Δl con la que podemos determinar la longitud de la cuerda l . Derivando la expresión inmediata anterior se tiene que,

$$\Delta l = \frac{2g}{4\pi^2} T \Delta T$$

Haciendo una apreciación de un experimento común, donde la altura de una habitación sea de 2.2 m, se tiene que para un péndulo de esa longitud, su período será de aproximadamente $T = 3$ s. Para estimar el error ΔT , e incluirlo en la fórmula anterior, hacemos notar que existe un tiempo de reacción de nuestro pulgar para oprimir el botón de

arranque y paro del cronómetro. Este error es del tipo sistemático y tiende a cancelarse. Lo adecuado es realizar varias observaciones con muchas oscilaciones y calcular la desviación estándar σ de el período. Una estimación real de σ nos da un valor de $\sigma = \Delta T = 0.02$ s en el error en las mediciones que hagamos para T con un cronómetro. Introduciendo $T = 3$ s y $\Delta T = 0.02$ s, en la expresión inmediata anterior tenemos como resultado que $\Delta l = 0.03$ m es decir 3 cm. En otras palabras, es posible obtener, con este procedimiento, errores hasta del $(\Delta l / l) 3100 = (0.03 / 2.2) 3100 \approx 1.4\%$.

Recordamos que, una vez obtenida la longitud total l de nuestra escala, debemos proceder a marcar el hilo por: la mitad, la cuarta, la octava, parte etc., creando así una regla graduada misma que se utilizará para medir la anchura A , longitud L y altura H del volumen $V = A \times L \times H$ a que debemos calcular.

Para cada una de las dimensiones de la habitación se debe calcular el error en sus dimensiones y proceder de acuerdo a la sección 4.4.2. En este caso,

$$\left(\frac{\Delta(V)}{V}\right)^2 = \left(\frac{\Delta(A)}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta(L)}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta(H)}{H}\right)^2$$

E7

En una buena aproximación podemos suponer que la superficie del agua, al oscilar, permanece "plana". Consideraremos también que toda la masa del agua está concentrada en su baricentro. Con estas condiciones, el agua se moverá de su punto de equilibrio P al punto de máxima oscilación P' como se muestra en la figura 20(a).

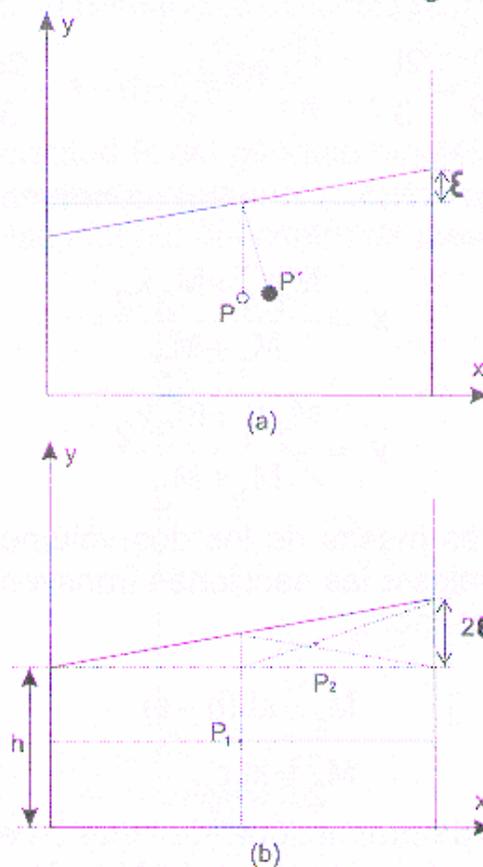


Figura 20

Haciendo referencia a la figura 20(b), las coordenadas del punto P son $x = L/2$ y $y = h/2$. Donde L es la longitud del contenedor y h es la profundidad del agua.

Para determinar las coordenadas del punto P' , dividimos el volumen de agua en dos prismas. El primero de sección rectangular y el segundo —colocado encima del primero— de sección triangular, como se muestra en la figura 20 (b).

El centro de masa P_1 del primero de los dos volúmenes tiene como coordenadas,

$$x_1 = \frac{L}{2}, \quad y_1 = \frac{h - \varepsilon}{2}$$

Las coordenadas del centro de masa P_2 del segundo volumen de agua corresponden a las del baricentro de la sección triangular y están dadas por

$$x_2 = \frac{2L}{3}, \quad y_2 = h - \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{3}$$

Usando estos datos tenemos que las coordenadas de P' son por definición:

$$x' = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2}$$

$$y' = \frac{M_1 y_1 + M_2 y_2}{M_1 + M_2}$$

donde M_1 y M_2 son las masas de los dos volúmenes de agua. Estas masa son proporcionales a las secciones transversales de las mismas por lo que podemos escribir,

$$M_1 = kL(h - \varepsilon)$$

$$M_2 = kL\varepsilon$$

donde k es un factor de proporcionalidad que se eliminara al expresar las coordenadas x' y y' en términos de M_1 y M_2 , de manera que las coordenadas del punto P' son,

$$x' = \frac{L}{2} + \frac{L\varepsilon}{6h} = x + \frac{L\varepsilon}{6h}$$

$$y' = \frac{h}{2} + \frac{\varepsilon^2}{6h} = y + \frac{\varepsilon^2}{6h}$$

Por lo tanto, el desplazamiento del centro de masa del agua al oscilar es,

$$\Delta x = x' - x = \frac{L\varepsilon}{6h}$$

$$\Delta y = y' - y = \frac{\varepsilon^2}{6h}$$

Suponiendo que el centro de masa se desplaza como un péndulo simple de longitud R , su período de oscilación es,

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

Para determinar la longitud R del péndulo hipotético en función de las dimensiones del volumen de agua, nos referimos a la figura 21 donde d representa el desplazamiento del centro de masa de P a P' .

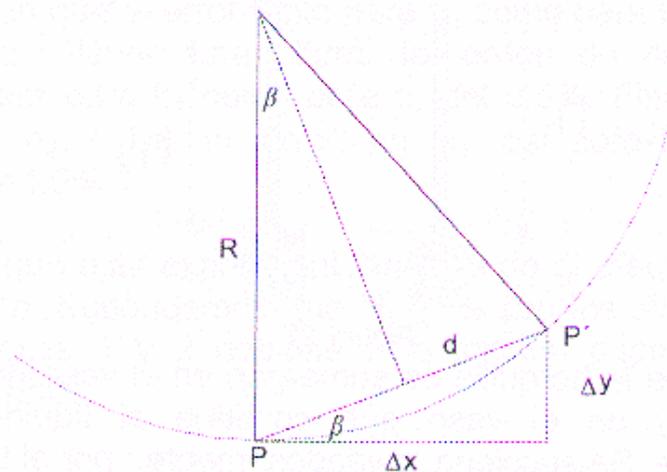


Figura 21

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\text{sen}\beta = \frac{\Delta y}{d} = \frac{d}{2R}$$

por lo tanto,

$$R = \frac{d^2}{2\Delta y} = \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{2\Delta y} = \frac{L^2 + \varepsilon^2}{12h}$$

dado que $\varepsilon \ll L$, se tiene que $R \approx L^2/12h$ y entonces el período de oscilación, según este modelo es,

$$\tau = \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}}$$

E8

El dispositivo experimental se ilustra en la figura 22.

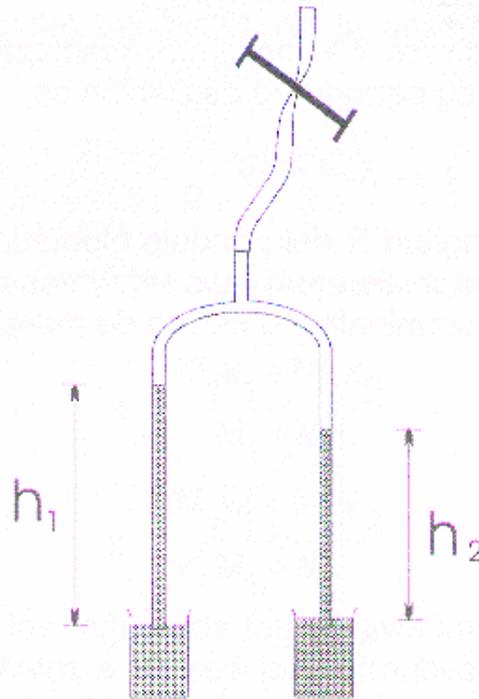


Figura 22

Los extremos de la horquilla se sumergen en el vaso de precipitados con el agua y en el vaso que contiene al líquido de prueba respectivamente. Se succiona, cuidadosamente, por el tercer extremo de la horquilla para que los dos líquidos suban por los brazos de la misma hasta alcanzar el máximo nivel posible. Se cierra el extremo por donde se succiona aplicando un torniquete con la pinza de manera que las columnas de los líquidos preserven sus niveles alcanzados. Se procede a medir los niveles h_1 y h_2 .

Las presiones son iguales en ambos extremos superiores de las columnas de los líquidos ya que estos se encuentran conectados por el vacío parcial que hemos hecho en la horquilla. También las presiones son iguales en la superficie de los líquidos en los vasos ya que ambos se encuentran sujetos a la presión atmosférica. Por lo tanto, las presiones ejercidas por las columnas h_1 y h_2 deben ser iguales. Es decir,

$$\rho_1 \times h_1 = \rho_2 \times h_2.$$

donde ρ_1 y ρ_2 son las densidades de los líquidos correspondientes.

Si uno de los líquidos es agua su densidad es igual a $\rho_2 = 1$ en unidades apropiadas y por lo tanto la densidad ρ_1 del líquido desconocido será,

$$\rho_1 = h_2 / h_1$$

La incertidumbre del experimento puede ser estimada inicialmente de la siguiente forma. Cada medición de la altura de las columnas tiene una incertidumbre de alrededor de 1mm al medir el nivel superior y 1mm al tomar el nivel inferior en la base de las columnas de los líquidos. Por lo que el error tanto para h_1 como para h_2 es de 2mm. Si las columnas tienen una altura del orden de 40.0 cm el error porcentual será para h_1 como para h_2 del 0.5%. Finalmente y dado que $\rho_1 = h_2 / h_1$, el error en ρ_1 es aproximadamente del 0.5%.+0.5%. =1.0%

La forma en que este experimento incluye de el efecto de capilaridad es la siguiente. Supongamos que H_1 y H_2 son las alturas adicionales de las columnas 1 y 2 debidas a la tensión superficial. Entonces podemos escribir

$$\rho_1 \times (h_1 + H_1) = \rho_2 \times (h_2 + H_2.)$$

Si la densidad del agua es igual a $\rho_2 = 1$ (en unidades apropiadas) la densidad ρ_1 del líquido desconocido será,

$$\rho_1 = \frac{h_2 + H_2}{h_1 + H_1}$$

En otras palabras, midiendo experimentalmente las alturas ($h_1 + H_1$) y ($h_2 + H_2$) y calculando su cociente se elimina el efecto de tensión superficial. Es decir cada valor de h_1 y h_2 es mayor a lo que en realidad debería ser por unas cantidades fijas H_1 y H_2 respectivamente. El efecto en una gráfica de h_1 vs. h_2 es el de desplazar la línea obtenida , pero sin alterar su pendiente($\rho_1 = h_2 / h_1$).

E9

El dispositivo experimental se ilustra en la figura 23.

Este consiste de una rampa formada por la regla de aluminio, la que es colocada con un extremo apoyado al borde de la mesa y el otro levantado a una altura h .

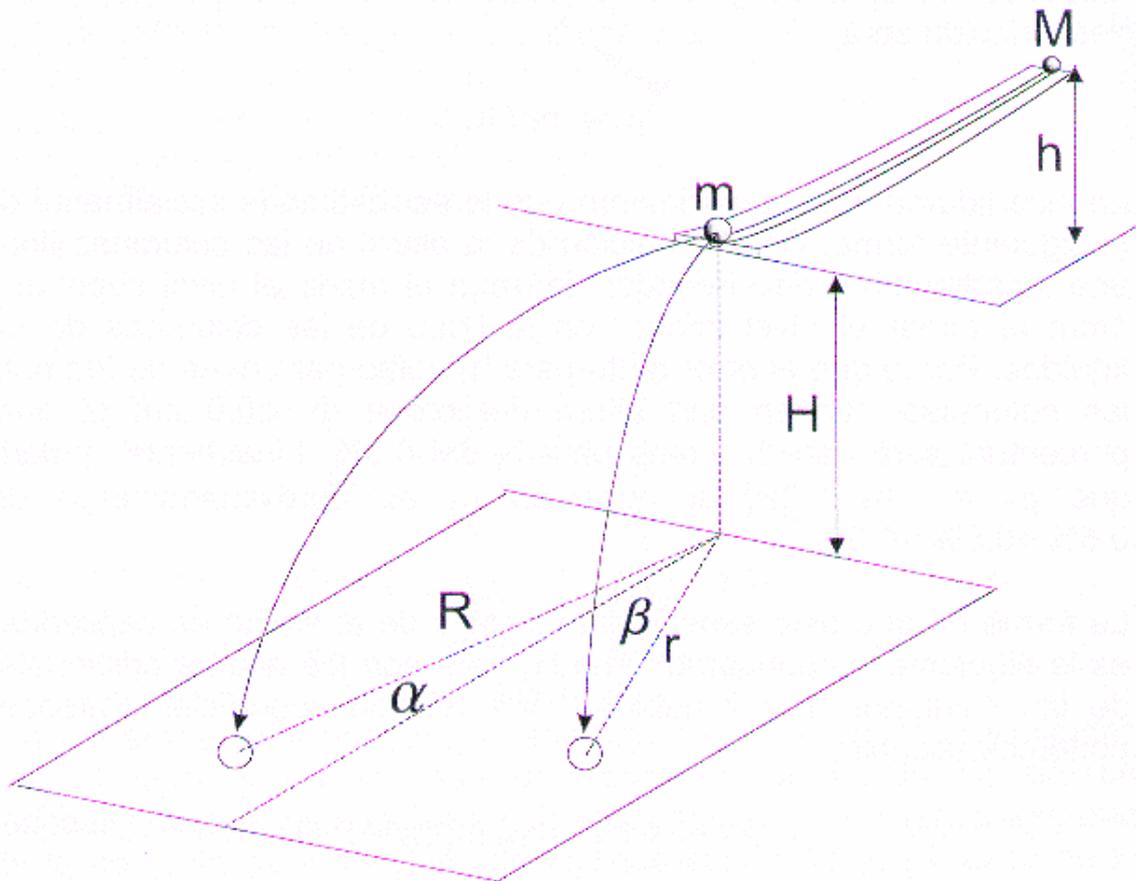


Figura 23

Debemos remarcar que hay que doblar de manera cóncava a la regla de aluminio para que el extremo que se coloca al borde de la mesa, sea paralelo a la superficie de la misma. De esta manera el balón de masa conocida M , al rodar por la ranura de la regla, golpeará a la canica en reposo y de masa m , con una velocidad v_i . En estas condiciones, el vector v_i se encontrará en el mismo plano (XY) que el de la superficie de la mesa.

La ranura permite al balón rodar en una trayectoria dirigida hacia el centro de la canica inmóvil. En esta forma, el choque será casi frontal y las esferitas caerán casi en la misma dirección que el eje de la regla. La ventaja de este hecho es que podemos colocar las hojas de papel

blanco y carbón sobre el piso, directamente enfrente del eje de la rampa. Un choque apartado del centro sesgaría las trayectorias y haría que necesitaríamos cubrir una gran extensión del piso con hojas de papel blanco y carbón.

Después de chocar las dos esferitas, sus trayectorias describirán un tiro parabólico antes de impactarse con la hoja de papel carbón que ha sido colocada sobre una hoja blanca que reposa en el piso. Los puntos de impacto quedarán así registrados sobre la hoja de papel (plano XY). Con ayuda de una plomada se marca sobre la hoja de papel el origen del plano XY. Este corresponde al punto donde originalmente la canica impactada estaba en reposo.

Con ayuda de una segunda regla se mide la distancia R , desde el origen al punto de impacto de el balín de masa M , y también, se mide la distancia r , desde el origen al punto de impacto de la canica de masa m .

Sobre la misma hoja de papel se traza el eje X del plano XY siendo este una recta que pasa por el origen y paralela al eje del plano inclinado formado por la regla de aluminio. Usando el transportador se mide el ángulo α formado por el vector R y el eje X y se mide además el ángulo β entre el vector r y el mismo eje.

Con estos datos y utilizando las leyes de conservación y ecuaciones de la cinemática es posible hallar el valor de la masa m .

Veamos en detalle la solución.

Utilizando el principio de conservación del momento lineal podemos escribir la siguiente relación vectorial,

$$M \mathbf{v}_i = M \mathbf{v}_{f1} + m \mathbf{v}_{f2}$$

donde los subíndices 1 y 2 corresponden a las velocidades del balín y de la canica después de la colisión respectivamente. Escribiendo esta ecuación en términos de sus componentes de acuerdo con la figura 24,

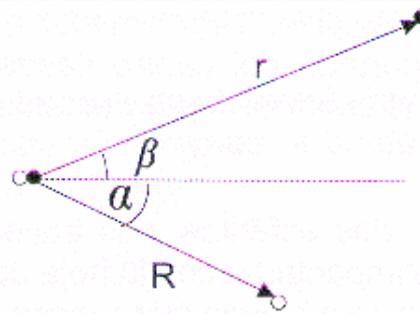


Figura 24

se tiene,

$$Mv_i = Mv_{f1x} + mv_{f2x} = Mv_{f1} \cos\alpha + mv_{f2} \cos\beta \dots\dots S - 9.1$$

$$0 = Mv_{f1y} - mv_{f2y} = Mv_{f1} \operatorname{sen}\alpha - mv_{f2} \operatorname{sen}\beta \dots\dots S - 9.2$$

En este par de ecuaciones no conocemos los valores de las velocidades v_i , v_{f1} y v_{f2} mismas que más adelante determinaremos. Sin embargo si conocemos α y β ya que los podemos medir. En este punto, el lector puede pensar que de las dos ecuaciones es posible determinar ambas masas M y m . Sin embargo hacemos notar que es necesario conocer el valor de alguna de las dos masas para poder determinar la otra. En este caso conocemos M ya que es dato del problema.

Para hallar el valor de v_i empleamos el principio de la conservación de la energía, suponiendo que las pérdidas por fricción son despreciables y que el momento angular del balón al rodar por el plano es también despreciable, de esta forma tenemos,

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv_i^2$$

$$v_i = \sqrt{2gh}$$

para hallar los valores de v_{f1} y v_{f2} utilizamos la expresión conocida para la caída libre:

$$H = \frac{1}{2} gt^2$$

despejando obtenemos el tiempo que tardan las dos esferitas en golpear el suelo después de su impacto inicial,

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Usando el valor de t procedemos a calcular los valores de v_{f1} y v_{f2} , ya que,

$$v_{f1} = \frac{R}{t}$$

$$v_{f2} = \frac{r}{t}$$

Finalmente introduciendo los valores de los ángulos, de las velocidades y de M en cualquiera de las ecuaciones S-9.1 o S-9.2 se obtiene el valor de m .

Cabe hacer notar que la fuente principal de error en el experimento está en la medición de los ángulos α y β .

Como ya se mencionó, el arreglo experimental provoca que el choque ocurra de manera poco sesgada y por lo tanto los ángulos α y β son pequeños. En este caso el error propagado al calcular el coseno de los ángulos es mucho menor que el que se propaga al calcular el seno de los mismos, por lo que resulta mejor utilizar la ecuación S-9.1 que la S-9.2.

E10

En principio podemos poner a flotar la barrita de madera sobre el agua. Como la barrita está flotando en equilibrio, la fuerza de flotación es igual al peso de la barrita. Esto es,

$$\rho_{H_2O} V_{H_2O} = \rho_M V_M$$

dónde ρ_{H_2O} y ρ_M son la densidad del agua –que es igual a 1- y la densidad de la madera, V_{H_2O} y V_M son el volumen de agua desplazada por la barrita y el volumen de la barrita respectivamente.

Un simple despeje nos indica que,

$$\rho_M = \frac{V_{H_2O}}{V_M}$$

es decir, este método nos obliga a medir volúmenes; largo y ancho de la barrita así como la longitud lo que flota de la barrita en relación a lo que se encuentra bajo el agua. Sin embargo todas éstas dimensiones, salvo la longitud de la barrita, son del orden de magnitud de la mínima división de la propia regla de medida, lo que introduce un error muy grande.

Una alternativa es la de apoyar un extremo de la barrita de madera en el filo del borde del recipiente de agua como lo muestra la figura 25, donde L es la longitud total de la barrita, Y es la distancia de un extremo de la barrita al punto donde ésta penetra en el agua y X es la distancia de éste mismo extremo al filo del borde del recipiente.

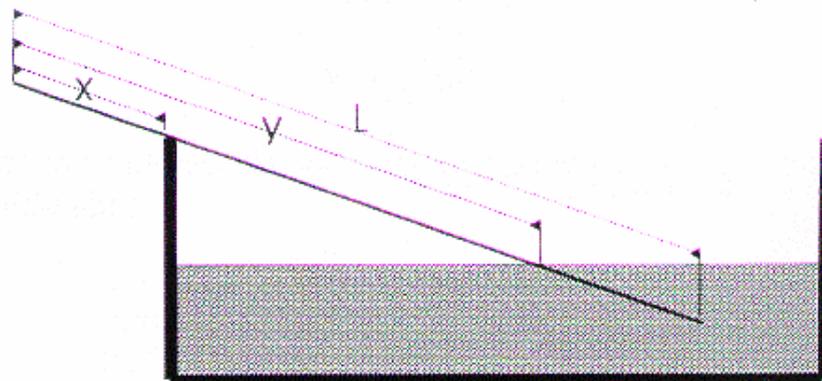
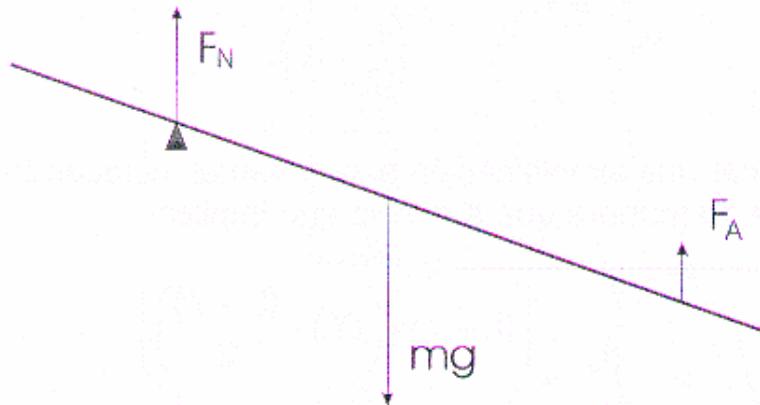


Figura 25

¿Cuál es la ventaja de colocar así a la barrita?. La idea es encontrar la relación entre ρ_M y las longitudes X, Y y L. La ventaja es que las longitudes de éstas son grandes comparadas con la mínima división de la regla graduada, de manera que el error de medición se reduce.

Para encontrar ρ_M en función de X, Y y L, debemos analizar el siguiente diagrama de fuerzas.



Sí consideramos las torcas alrededor de el filo del borde del recipiente podemos escribir,

$$[F_N \times 0] + \left[mg \times \left(\frac{L}{2} - X \right) \right] - \left[F_A \times \left((Y - X) + \frac{(L - Y)}{2} \right) \right] = 0$$

donde:

$$F_A = V_{H_2O} \rho_{H_2O} = A (L - Y) \rho_{H_2O}$$

Siendo A el área de la sección transversal de la barrita.

Además mg se puede escribir como,

$$mg = V_M \rho_M = A L \rho_M$$

Simplificando la ecuación de equilibrio de torcas se tiene,

$$\left[A L \rho_M \times \left(\frac{L}{2} - X \right) \right] = \left[A(L - Y) \rho_{H_2O} \times \left((Y - X) + \frac{(L - Y)}{2} \right) \right]$$

despejando ρ_M ,

$$\frac{\rho_M}{\rho_{H_2O}} = \frac{\left[(L - Y) \times \left((Y - X) + \frac{(L - Y)}{2} \right) \right]}{\left(\frac{L}{2} - X \right) L}$$

podemos hacer una simplificación experimental, colocando la barrita al filo del borde de manera que $X = 0$, lo que implica,

$$\frac{\rho_M}{\rho_{H_2O}} = \frac{\left[(L - Y) \times \left(Y + \frac{(L - Y)}{2} \right) \right]}{\left(\frac{L}{2} \right) L}$$

esto es

$$\frac{\rho_M}{\rho_{H_2O}} = \frac{\left[(L - Y) \times \left(\frac{(Y + L)}{2} \right) \right]}{\left(\frac{L}{2} \right) L}$$

$$\frac{\rho_M}{\rho_{H_2O}} = \frac{L^2 - Y^2}{L^2}$$

$$\frac{\rho_M}{\rho_{H_2O}} = 1 - \frac{Y^2}{L^2}$$

Esta última relación implica que tan solo tenemos que medir Y y L para poder determinar la densidad relativa. El error porcentual total estará dado por dos veces la suma de los errores porcentuales de L mas Y .

El objetivo del experimento es medir la densidad de un gas conociendo anticipadamente su masa y determinando su volumen. En este experimento mediremos la masa y el volumen del bióxido de carbono CO_2 desprendido de una pastilla efervescente al disolverse en el agua. La figura 26 muestra el arreglo experimental usado.

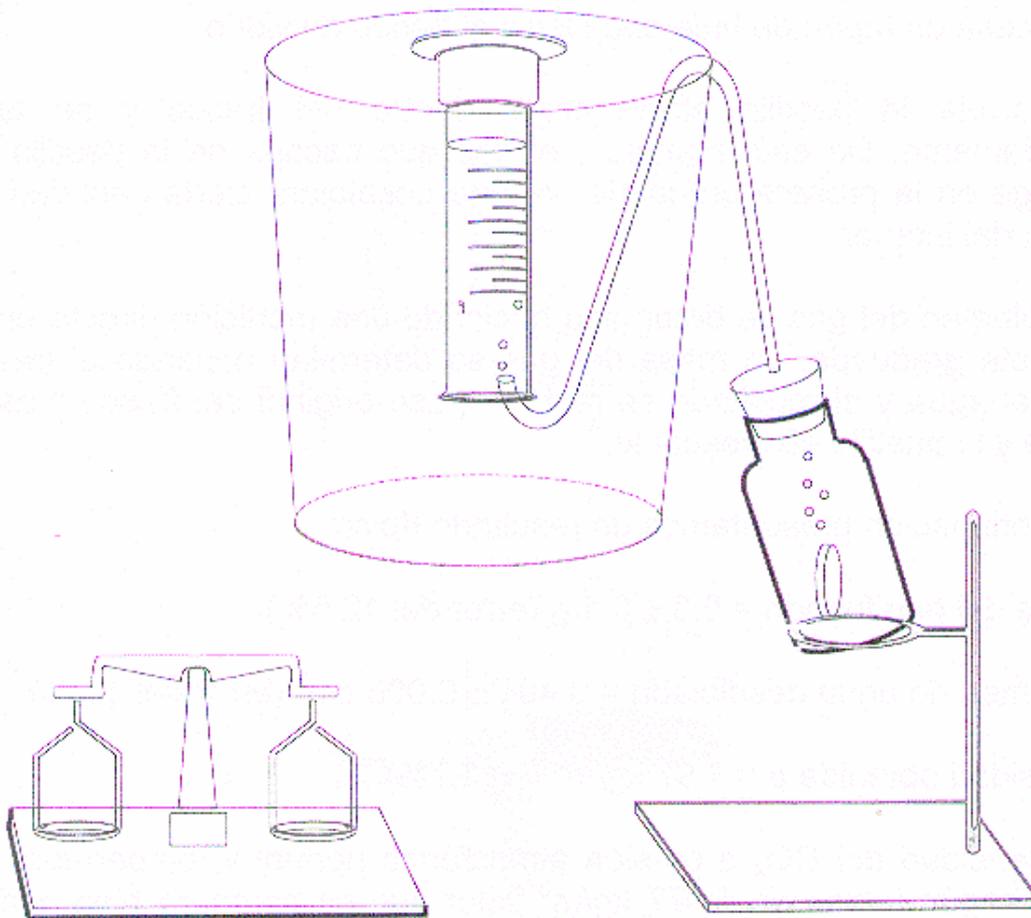


Figura 26

Se deberá pesar un frasco lleno hasta la mitad de su volumen con agua y una pastilla de Alka-Seltzer en una balanza con una precisión de 0.05 g.

Se llena a la mitad con agua una cubeta de 20 litros y se llena totalmente una probeta graduada de 500 cm^3 . A continuación, la probeta se tapa herméticamente con la mano y se voltea de cabeza de manera que su base quede apuntando hacia arriba. La probeta se introduce totalmente dentro de la cubeta y se retira la mano

destapando la probeta. El agua dentro de la probeta no escapará de ella.

Se introduce una manguera de hule dentro de la probeta. En el otro extremo la manguera deberá estar conectada a un tubo de vidrio que atraviesa un tapón de hule que cierra al frasco de vidrio.

Se arroja la pastilla efervescente dentro del frasco y se tapa rápidamente. De esta manera, el gas que escapa de la pastilla se recoge en la probeta graduada, ya que desalojara cierta cantidad de agua del interior.

El volumen del gas se determina haciendo una medición directa en la probeta graduada. La masa del gas se determina pesando el frasco con el agua y el resultado se resta al peso original del frasco mas el agua y la pastilla efervescente.

A continuación presentamos un resultado típico.

Masa del gas fugado = 0.8 ± 0.1 g (error del 12.5%)

Volumen de agua desalojada = 0.405 ± 0.005 cm³ (error del 1.2%)

Densidad obtenida $\rho = 1.97$ kg/m³ ($\pm 13.7\%$)

La densidad del CO₂ a presión atmosférica normal y temperatura de 0°C, según tablas es 1.977 kg/m³ valor que se compara bien con el resultado obtenido.

Finalmente queremos indicar una variante a este experimento. Esta consistiría en determinar la cantidad de gas disuelto en una bebida gaseosa, por ejemplo una Coca-Cola. Bastaría llenar el frasco de vidrio del experimento con la bebida gaseosa y disolver azúcar en ella. Esto haría que el gas fuera desplazado por el dulce.

E12

El objetivo de este experimento es averiguar que relación existe entre el tiempo de salida de un volumen determinado de agua y el área del orificio

La figura 26 muestra el dispositivo experimental

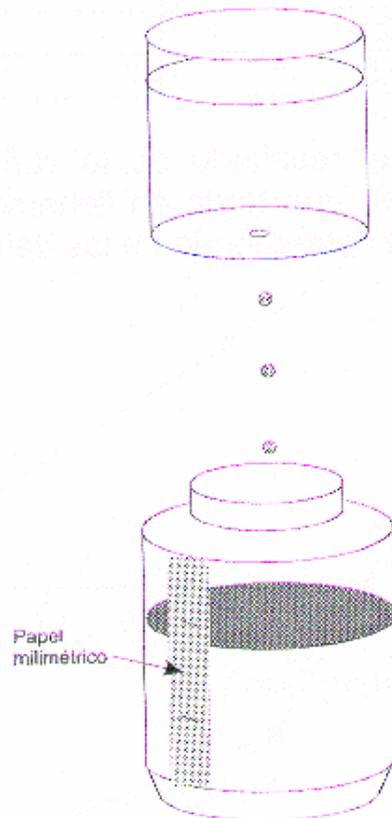


Figura 26

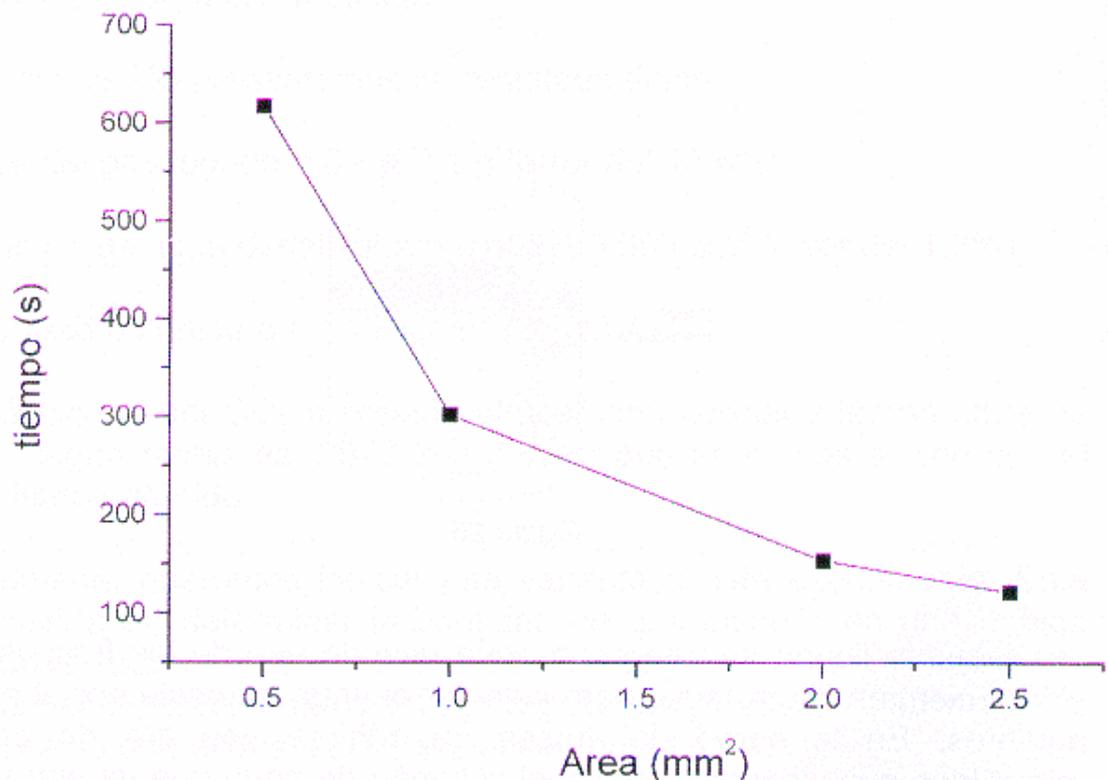
Las latas se llenan en turno con agua usando uno de los frascos de vidrio mientras el otro sirve para coleccionar el agua que sale por el o los agujeros. En la pared del frasco se adhiere una tira de papel milimétrico que sirve para aforar el volumen de agua que va entrando al frasco. Sobre el papel se hacen dos marcas que sirven de

referencia al volumen que se toma en cuenta. La parte baja del frasco, que generalmente no es precisamente cilíndrica, se inunda para así no tomarla en cuenta. De esta manera solo se toma en cuenta el volumen cuya sección transversal es circular. El tiempo que tarda en llenarse dicho volumen fijo se toma varias veces con un cronómetro. La tabla 4 muestra un resultado típico

Tabla 4

Area aprox mm ²	Tiempo seg
0.5	617±12
1	302±10
2	154±11
2.5	122±13

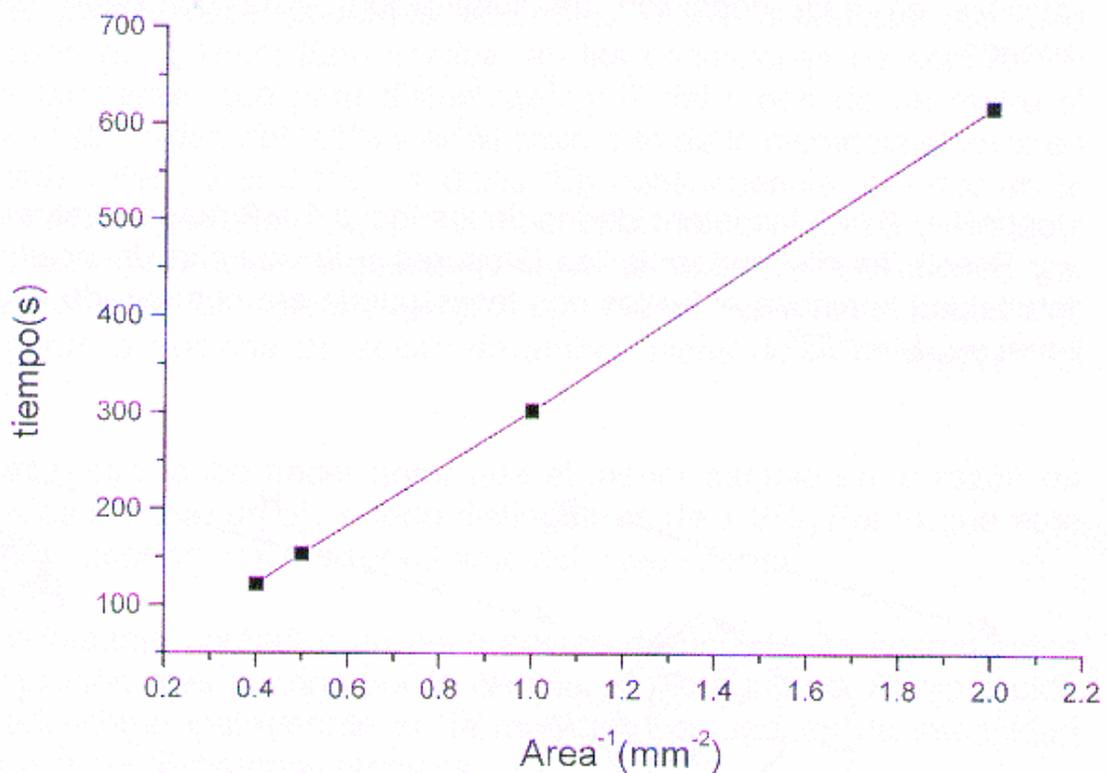
La gráfica 4 muestra el resultado de la variación del área de los orificios versus el tiempo que tarda en llenarse el volumen prefijado. Los puntos de la gráfica corresponden a los datos de la tabla 4 .



Gráfica 4

Dado su tamaño, los puntos en la gráfica cubren el posible error experimental.

Es conveniente hacer un cambio de variable y usar como variable independiente el inverso del área. La gráfica 5 muestra el resultado de graficar el inverso del área a de los orificios versus el tiempo que tarda en llenarse el volumen prefijado.



Gráfica 5

Esta última gráfica demuestra que el tiempo de vaciado es inversamente proporcional al área del orificio.

E13

La figura 27 muestra el arreglo experimental usado. Las lámparas se colocan con una separación de un par de metros y el papel con la mancha de aceite se coloca verticalmente entre ambas lámparas.

En este experimento la mancha de aceite presenta un mismo nivel de contraste en ambos lados del papel cuando los dos lados del mismo están igualmente iluminados. Incluso, la mancha puede llegar a ser invisible en esta condición de iluminación. Esta condición se da cuando ,

$$\frac{I_1}{r^2} = \frac{I_2}{R^2}$$

donde I_1 y I_2 son las intensidades de los focos 1 y 2 respectivamente y r y R son las distancias de las lámparas a la mancha de aceite. La intensidad luminosa entre los dos focos puede ser comparada, siendo igual a $I_1/I_2 = r^2/R^2$.

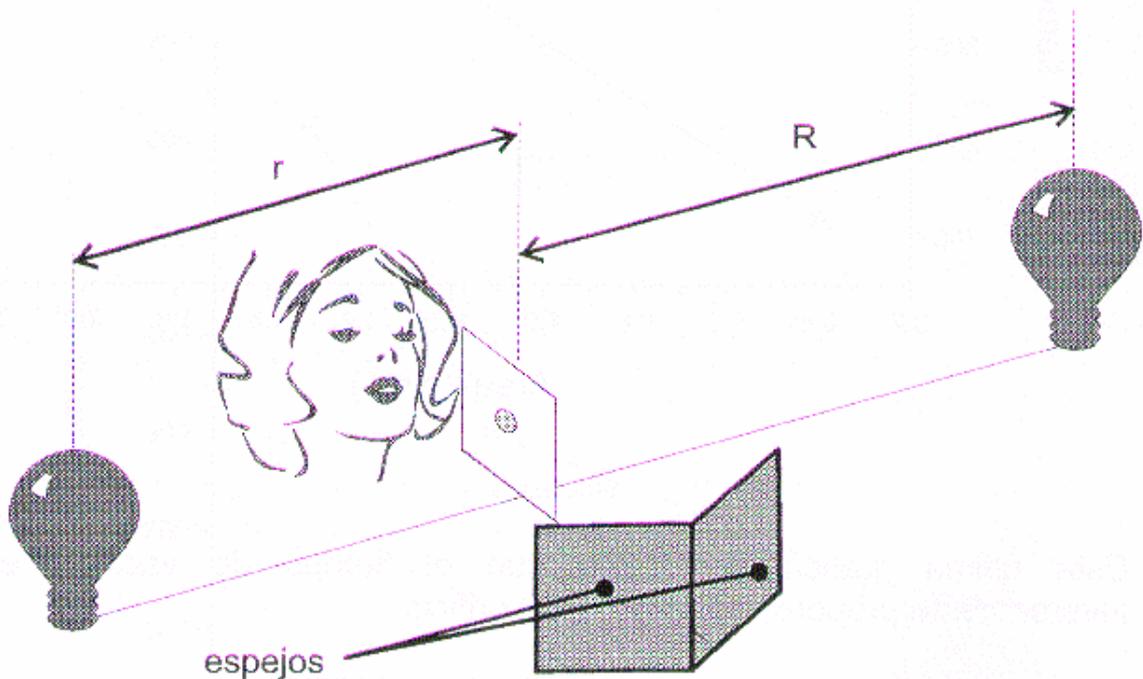


Figura 27

Los espejos sirven para ajustar con precisión las distancias r y R ya que colocados adecuadamente sirven al observador para ver simultáneamente ambos lados de la hoja de papel filtro sin necesidad de cambiar su posición

Es esencial que otras fuentes de luz presentes en el laboratorio se encuentren apagadas para que el recinto se encuentre oscuro.

El error en el experimento se deriva no solo de medir las distancias r y R sino principalmente de la habilidad de nuestro ojo para distinguir la relación de intensidades entre dos fuentes.

En el primer caso podemos determinar esas distancias con una precisión de $\pm 1\text{mm}$. Esto implica, en las condiciones de separación entre lámparas, que para distancias r y R del orden de un metro el error es del orden del 0.1% y en el cuadrado de la distancia el error es del orden del $(2 \pm 0.1\%) = 0.2\%$. En consecuencia, el error en la razón de intensidades $I_1/I_2 = r^2/R^2$ es del orden del $(0.2\% + 0.2\%) = 0.4\%$. Este valor supone que el principal instrumento de medición, que en este caso es nuestro propio ojo, no comete error alguno al comparar la mancha de aceite en ambos lados de la hoja de papel filtro.

Sin embargo, cabe hacer notar que el menor cambio en la razón de intensidades que un ojo puede distinguir es de $\pm 2\%$. Por lo que este error correspondería al error mínimo del experimento.

Es interesante comentar un poco acerca de uno de los instrumentos de medición más usados por la ciencia, el ojo humano. El ojo a sido utilizado como instrumento en la medición de razones de intensidad luminosa desde tiempos arcaicos.

En el siglo segundo antes de Cristo, el astrónomo griego Hiparco compiló un catálogo de estrellas clasificándolas en seis categorías según su brillo. Hoy en día esas categorías reciben el nombre de magnitudes.

Las estrellas más brillantes fueron catalogadas como de primera magnitud (1^m) mientras que las de menor brillantez fueron colocadas en la sexta magnitud (6^m). Todas las demás estrellas de su catálogo cayeron en magnitudes intermedias. Este sistema clasificatorio a perdurado por casi 22 siglos.

Las clasificaciones hechas por Hiparco fueron hechas sin la ayuda de instrumentos ópticos. Con el nacimiento de los instrumentos fotométricos, la graduación en la escala de magnitudes estelares fue refinada. En el año de 1856 el astrónomo Norman R. Pogson propuso un perfeccionamiento cuantitativo a la escala de Hiparco. Pogson notó que recibimos cerca de 100 veces más luz de una estrella de primera magnitud que de una de sexta magnitud. Como existen cinco intervalos entre la primera y sexta magnitud, el astrónomo sugirió que la razón entre las intensidades correspondientes a un intervalo fuera igual a la raíz quinta de 100. Esto es aproximadamente igual a 2.512... En otras palabras, una estrella de cuarta magnitud nos ilumina 2.512 veces más que una de quinta magnitud.

Si m_1 y m_2 son las magnitudes correspondientes a estrellas de las que recibimos un flujo luminoso I_1 y I_2 respectivamente, la diferencia de magnitudes entre m_1 y m_2 se define como,

$$m_1 - m_2 = 2.5 \log_{10} \frac{I_1}{I_2}$$

Con este refinamiento de escala se pudo clasificar estrellas de la misma magnitud con magnitudes fraccionarias, por ejemplo de magnitud 3.42^m , 3.02^m etc.

Ahora bien, el ojo humano de una persona promedio es capaz de distinguir diferencias en iluminación entre dos objetos adyacentes solo si estas son mayores que el 2%, independientemente de la brillantez de los objetos. En otras palabras, ojo es capaz de distinguir

$$2\% = 0.02 = \frac{I_1 - I_2}{I_1}$$

lo que conlleva a que la relación de intensidades sea $I_2 = 0.98 I_1$.

Utilizando este valor en la definición de diferencia entre magnitudes se tiene que el ojo puede distinguir, en una noche clara y oscura, una diferencia Δm entre magnitudes estelares igual a,

$$\Delta m = 2.5 \log_{10} 0.98 = -0.02$$

Es decir una diferencia entre magnitudes estelares de $\pm 0.02^m$

Sea J la intensidad del flujo luminoso transmitido a través de un medio y J_0 la intensidad de la fuente luminosa. La atenuación $(\Delta J/ J_0) = (J - J_0) / J_0$ es proporcional al espesor del medio Δx . Esto es,

$$\frac{\Delta J}{J} = -\mu \Delta x$$

donde μ es una constante y el signo menos implica la atenuación. Para variaciones muy pequeñas podemos escribir esta relación en forma diferencial,

$$\frac{dJ}{J} = -\mu dx$$

Para encontrar la atenuación total es necesario integrar esta ecuación. El resultado es,

$$\ln J = -\mu x + \ln C$$

Donde $\ln C$ es una constante de integración. Para encontrar esta constante, la intensidad en $x = 0$ se toma como J_0 por lo que $C = J_0$ y nuestra ecuación toma la forma,

$$\ln \frac{J}{J_0} = -\mu x$$

o, tomando antilogaritmos,

$$J = J_0 e^{-\mu x}$$

En 1729 el científico francés Pierre Bouguer encontró experimentalmente esta la ley de atenuación de la luz al atravesar un medio. La atenuación ocurre porque todos los materiales absorben parte de la luz que los atraviesa.

Muchos experimentos han mostrado que el coeficiente de absorción no depende de la intensidad de la radiación incidente. Se ha encontrado que el coeficiente es constante en un intervalo muy amplio de intensidades luminosas, dentro del cual las intensidades

pueden variar por un factor incluso de 10^{20} . Sin embargo la ley de Bouguer se viola tanto a intensidades muy pequeñas de luz como a intensidades muy grandes. La rama de la física que estudia estos fenómenos se conoce como electrónica cuántica y trata de la interacción de la luz con la materia.

Fijamos ahora nuestra atención en el experimento.

La figura 28 muestra el arreglo experimental usado. Esencialmente es el mismo arreglo que el del experimento E13

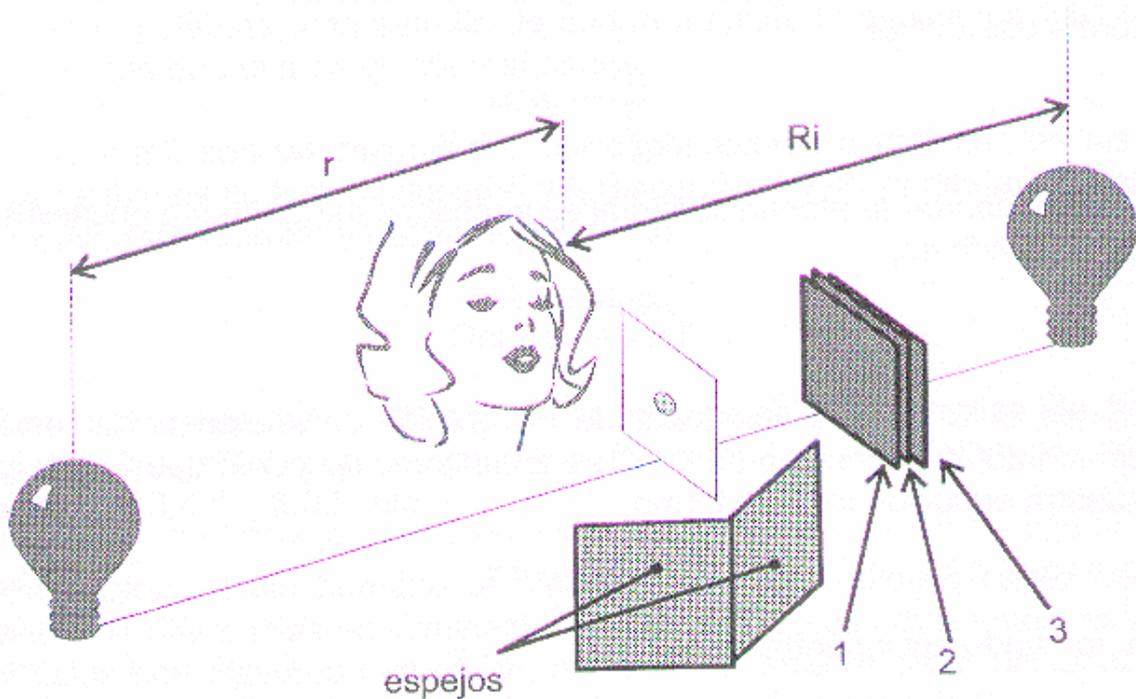


Figura 28

En este caso las placas de vidrio, marcadas por 1,2,3 en la figura 28, se van colocando entre uno de los focos (es conveniente el de mayor intensidad) y el papel filtro con la mancha de aceite.

Si se grafica el espesor de vidrio que atraviesa la luz, contra $2 \ln (r/R_i)$ se debe obtener una recta cuya pendiente es igual a μ . Si no se obtiene una buena recta puede deberse a una fuente de error.

La principal fuente de error proviene del hecho que las placas de vidrio no solo transmiten y absorben la luz, también la reflejan. La luz al pasar por la primera placa de vidrio se refleja en una fracción f de la

luz incidente. Al llegar al segundo vidrio se vuelve a reflejar en una fracción f de la luz transmitida por la primera placa de vidrio y rebota contra la primera placa que a su vez reflejara una parte correspondiente (figura 29). Es por ello que conviene limpiar muy bien las superficies de los vidrios y que procurar que cuando las placas de vidrio se apilen frente a la fuente de luz, estas se encuentren lo más pegadas que sea posible.

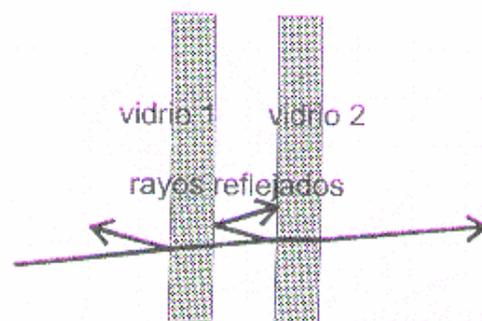


Figura 29

También es conveniente utilizar vidrios de diversos espesores en lugar de apilar placas del mismo espesor .

El experimento aquí descrito sirve de modelo para el calculo de blindajes de rayos X. En este caso el coeficiente μ depende de la longitud de onda del rayo X y del material de blindaje.

E15

La figura 30 muestra un posible arreglo experimental.

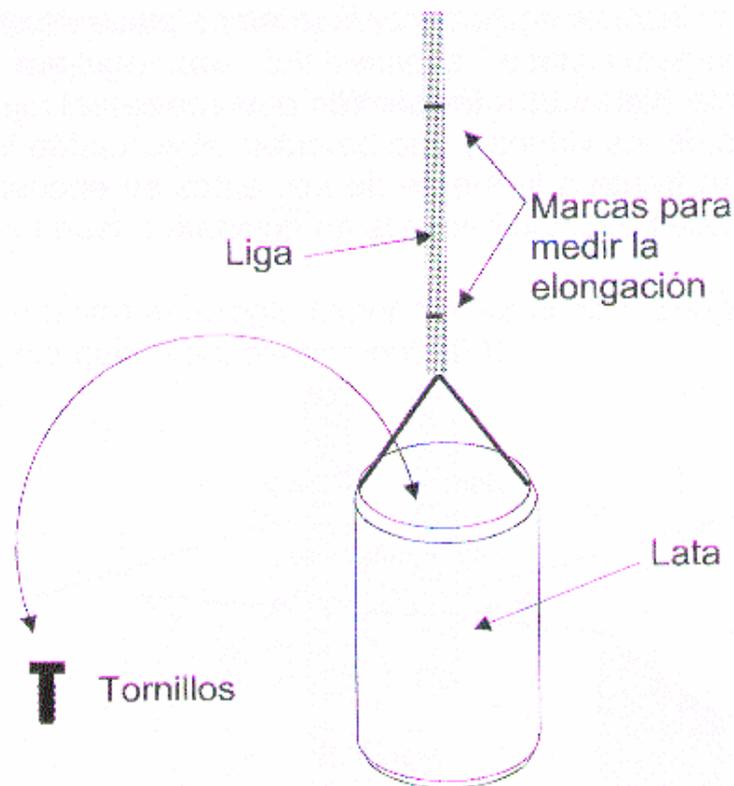


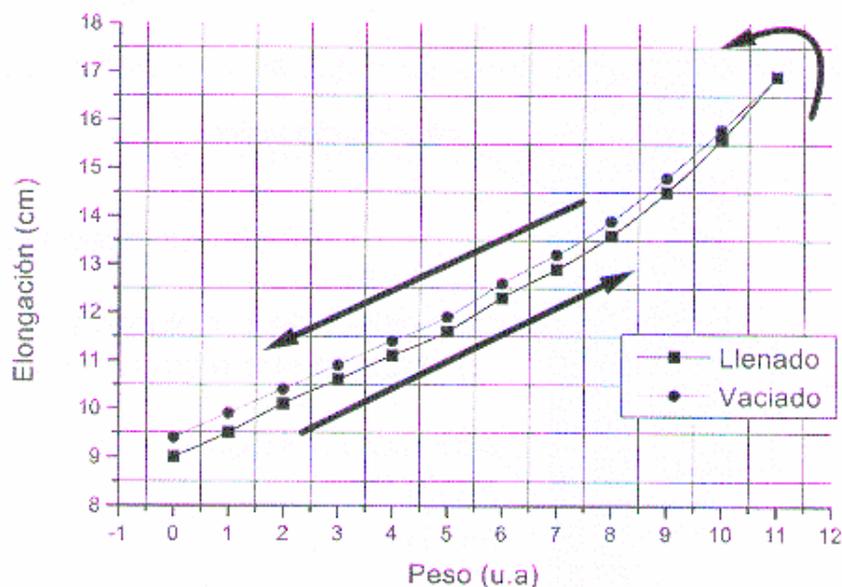
Figura 30

En este caso utilizamos una lata de aluminio abierta por un extremo. A la lata se le ató un cordón para balancearla y al cordón se le amarró una liga. A la liga se le hicieron dos marcas para medir su elongación. La liga se colgó. Poco a poco se fue añadiendo uno a uno tornillos de igual peso a la lata hasta sumar once tornillos. La elongación de la liga fue medida entre las dos marcas una vez que la oscilación que experimentaba el arreglo experimental cesaba. Posteriormente se fue retirando uno a uno cada tornillo y la recuperación de la liga fue medida sucesivamente, cuidando de que la oscilación del arreglo fuese mínima. Los resultados de la medición fueron los siguientes.

Tabla 5

Tornillos #	Llenado cm	Vaciado cm	Tornillos #	Llenado cm	Vaciado cm
0	9.1	9.3	6	12.3	12.6
1	9.6	9.8	7	12.9	13.2
2	10.1	10.4	8	13.6	13.9
3	10.6	10.7	9	14.5	14.8
4	11.1	11.3	10	15.6	15.8
5	11.6	11.8	11	16.9	16.9

La gráfica 6 muestra los resultados de la tabla.



Gráfica 6

Es de notar que la elongación que sufre la liga no solo depende del peso aplicado, sino de si este es agregado o quitado, es decir de la historia previa.

La curva mostrada en la gráfica superior recibe el nombre de curva de histéresis. El área limitada entre la curva superior y la inferior tiene unidades de trabajo o energía (peso X elongación). Puede ser calculada directamente de la curva de histéresis y corresponde a la energía disipada durante el proceso de deformación de la liga. Curvas similares se obtienen al aplicar un campo magnético a un material ferromagnético y graficar el campo contra la magnetización del material.

E16

Capilaridad

Como ya lo indicamos en las sugerencias, el experimento se realiza cortando tiras largas y delgadas de acetato y colocándolas a manera de cuñas entre ambos extremos largos de los vidrios porta muestras. Con pequeñas tiras de cinta adhesiva se fija el arreglo. Entre ambas placas de los porta muestras se forma así un volumen que puede ser variado agregando más tiras de acetato para variar la separación s entre las placas (ver figura 31).

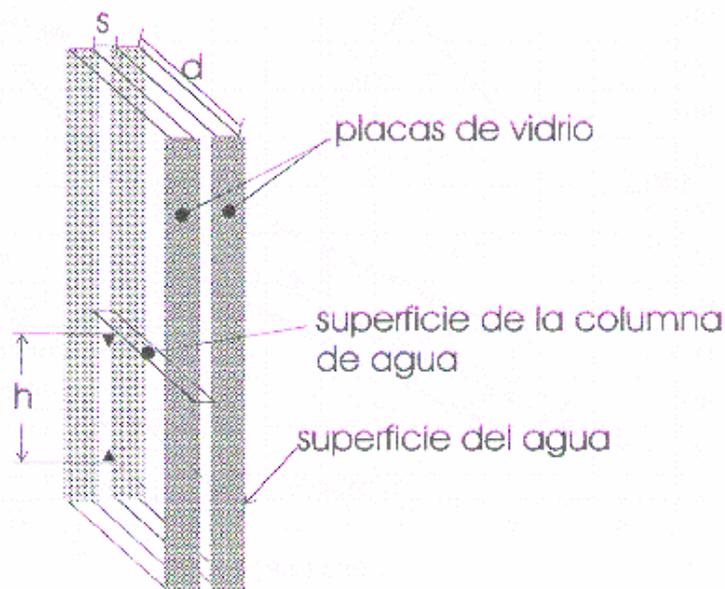


Figura 31

El arreglo debe ser sumergido lentamente por su extremo inferior en un recipiente con agua. Para poder efectuar el experimento, es mejor introducir uno de los extremos de las placas de vidrio en el líquido casi de manera rasante y paralela a la superficie. Al enderezar las placas y ponerlas en forma vertical, la columna de agua se eleva inmediatamente. Con sumo esmero se mide la distancia h que va desde, la superficie del agua del recipiente, a la superficie de la columna de agua atrapada entre las placas. El vernier sirve para medir el espesor de las tiras de acetato. Es conveniente apilar de 10 a 20 tiras para determinar su espesor y al resultado dividirlo entre el número de tiras que hallamos apilado. Esto significa que suponemos que el espesor de las tiras es uniforme. La razón de usar acetato para las tiras separadoras, es que estas, a diferencia de las de cartón, no

absorben agua. Si usáramos algún material poroso que absorbiera agua se alteraría fuertemente el resultado del experimento. Cabe hacer notar que para medir con facilidad el nivel h de la columna de agua, se le puede agregar algún colorante, como por ejemplo alguna anilina, sin embargo mas adelante explicaremos el porqué el valor de la constante σ varía notablemente.

Ahora conviene encontrar teóricamente la relación entre la constante σ y las dimensiones del volumen ocupado por el líquido. Hacemos referencia a la figura 31.

El peso de la columna de agua de densidad ρ entre las placas está dado por

$$mg = \rho Vh = \rho hsdg \dots \dots \dots (S16.1)$$

Utilizando la definición de F

$$F = \sigma l = \sigma(2s + 2d)$$

En equilibrio se cumple que $mg = F$

$$\sigma = \frac{\rho hsgd}{2(s+d)}$$

o bien

$$\sigma = \frac{\rho hsg}{2(1 + \frac{s}{d})}$$

pero $s/d \ll 1$, entonces

$$\sigma = \frac{1}{2} \rho hsg \dots \dots \dots (S16.2)$$

De esta fórmula inferimos que tan solo se tienen que efectuar las mediciones de h y de s para obtener el valor de σ . No es necesario medir el ancho d de los porta muestras.

Presentamos ahora un ejemplo típico de un experimento (tabla 6). Se midió la altura que alcanzó la columna de agua para 3 separaciones entre las placas. Las separaciones correspondieron a 3, 4 y 5 tiras

entre las placas. La tabla 6 muestra s y la altura que alcanzó la columna fue de 13 ± 2 mm. El lector podrá notar que la incertidumbre estimada como el máximo error posible, es considerable. La precisión de un vernier escolar es de media décima de milímetro, esto es $\Delta x = 0.05$ mm. Con el empleo de este instrumento se midió el espesor de 16 tiras de acetato. El resultado de la medición fue de $16 s_0 = 4.50 \text{ mm} \pm \Delta x$. Ahora bien, si suponemos que el espesor de las tiras es uniforme, se tiene que cada tira tiene un espesor individual de $s_0 = (4.50 / 16) \pm (0.05 / 16)$ mm. = 0.28 ± 0.003 mm. El error porcentual en este caso es de $(0.05 \times 100) / 16 = 0.3\%$. Hacemos notar que la precisión es muy buena, por lo que la incertidumbre en la separación entre las placas es como veremos despreciable si la comparamos con la medición de la altura h de la columna de agua.

Tabla 6

No de separadores	s (mm)	h (± 1 mm)	1/h
5	1.40(± 0.015)	7	0.143 \pm 0.18
4	1.12(± 0.01)	9	0.111 \pm 0.02
3	0.84(± 0.01)	13	0.079 \pm 0.001

Es posible efectuar varias mediciones de h correspondientes a varias separaciones s de tal forma que si se grafica s versus $1/h$ la pendiente nos dará un valor proporcional al de σ . El valor que se obtenga en el experimento para el agua debe estar alrededor de $\sigma = 70 \times 10^{-3}$ N/m (a temperatura ambiente), si se trata de agua destilada, pero si se trata de agua de la llave éste se reduce a unos 2/3 del citado valor.

Una variante interesante de este experimento, consiste en introducir una sola cuña pequeña entre dos placas de vidrio de manera que el espacio entre placas varíe desde cero, en un extremo de las placas, a la anchura de la cuña, en el otro extremo. En este caso la pregunta pertinente sería la siguiente: ¿Cuál es la forma geométrica aproximada de la curva que la superficie del agua atrapada crea entre las dos placas? La respuesta de acuerdo a la ecuación S16.2 es una hipérbola.

Para elaborar un modelo haremos las siguientes consideraciones refiriéndonos a la figura 32. La fuerza de empuje es debida a la porción de masa cuya altura es $2x$. Esta altura varia con el tiempo.

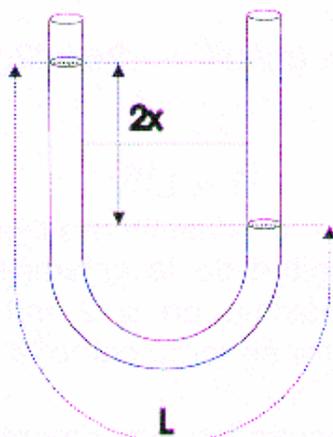


Figura 32

Por lo tanto dicha fuerza F puede ser descrita como,

$$F = (\text{volumen de la columna por encima del equilibrio}) \cdot (\text{densidad}) \cdot (\text{gravedad}) = - (2x) S \rho g$$

Entonces, según la segunda ley de Newton y despreciando las fuerzas de fricción,

$$m \frac{dx^2}{dt^2} = (-2x) S \rho g$$

donde m es la masa total.

La ecuación de anterior es del tipo

$$m \frac{dx^2}{dt^2} = -k x ,$$

con

$$k = 2S\rho g$$

Es decir es del tipo de la ley de Hooke. Por lo tanto, sabemos que el período T esta dado por

$$T = 2\pi (m/k)^{1/2}$$

donde $m = L S \rho$ corresponde a la masa total de la columna de longitud L .

Simplificando

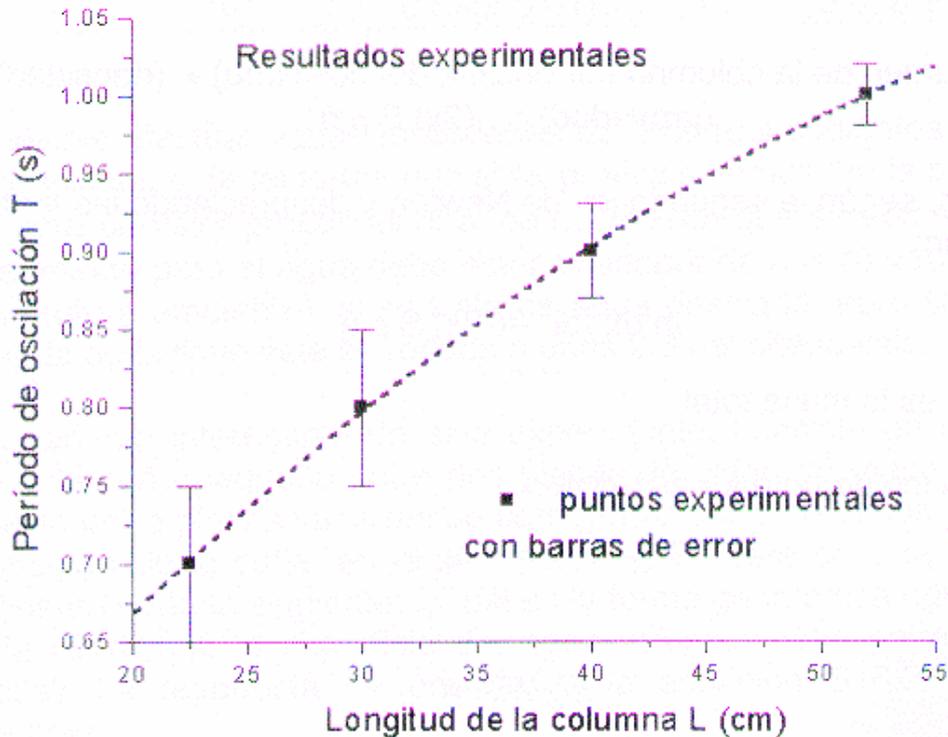
$$T = 2\pi (m/k)^{1/2} = 2\pi (L/2g)^{1/2}$$

Es decir

$$T \propto L^{1/2}$$

Las mediciones de la longitud de la columna fueron realizadas una sola vez con un error máximo de ± 2 mm y las del período se realizaron 10 veces y el error se tomó como la desviación estándar.

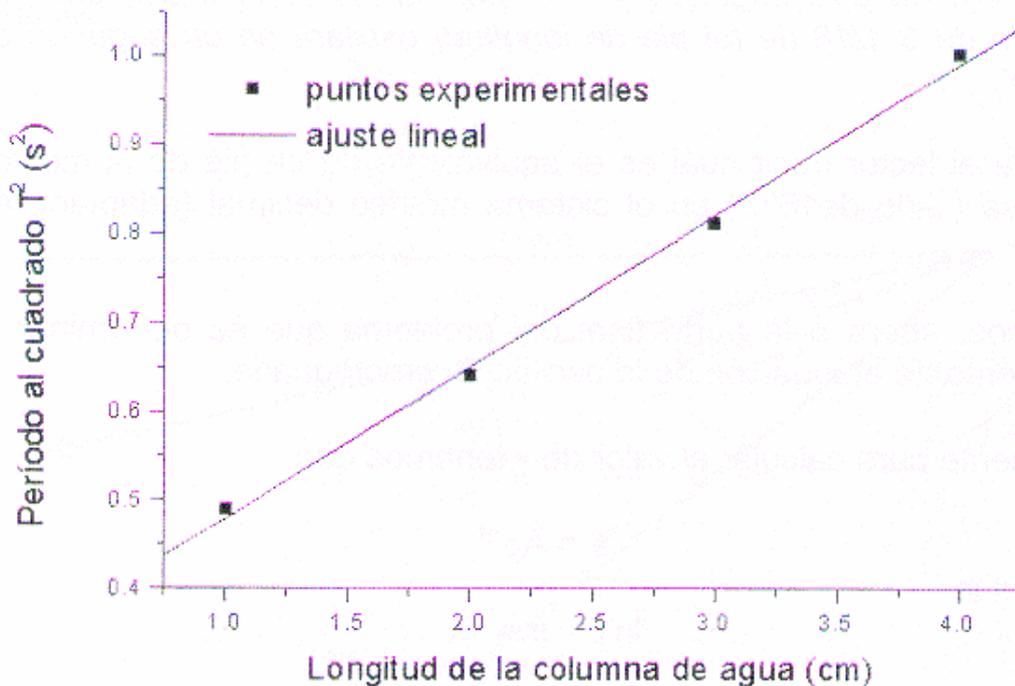
La gráfica 7 muestra los resultados experimentales obtenidos.



Gráfica 7

Las barras de error corresponden a \pm la desviación estándar obtenida para cada período.

Para poder comprobar que existe una dependencia del período proporcional a la raíz cuadrada de la longitud de la columna es conveniente graficar el período al cuadrado contra la longitud L (gráfica 8)



Grafica 8

Como era de esperarse T^2 es proporcional a L . El ajuste lineal se realiza por mínimos cuadrados. El resultado de este ajuste a la pendiente es $2 \text{ s}^2\text{m}^{-1} \lambda 2\pi^2 / g$.

Es interesante mencionar que este problema está basado en la proposición 44 del libro segundo de los "Principia" de Isaac Newton. Reproducimos a continuación su enunciado.

"Si el agua asciende y desciende alternativamente en las extremidades verticales de un tubo o canal; y se construye un péndulo cuya longitud entre su centro de suspensión y el centro de oscilación es igual a la mitad de la longitud del agua en el canal: yo afirmo, que el

agua ascenderá y descenderá en los mismos tiempos en los cuales el péndulo oscila."

El libro fue escrito en 1686 en latino, que era el idioma en el que se escribían en esa época los textos científicos. El libro también afirma que:

" Sí la longitud de toda el agua en el canal es igual a 6 1/9 pies de la medida francesa, el agua descenderá en un segundo de tiempo, y ascenderá en otro segundo y así por turnos in infinitum; para un péndulo de 3 1/18 de tal pie de longitud, oscilará en un segundo de tiempo".

¿Puede el lector decir cuál es el equivalente de un pie de la medida francesa (año de 1686) en el sistema métrico decimal (adaptado en 1875)?

Pasemos, ahora a la parte final del problema que es determinar el coeficiente de atenuación de la oscilación amortiguada.

Finalmente para calcular el valor de γ tenemos que

$$Y = Ae^{-\gamma t}$$

Por lo que

$$\ln Y = \ln A - \gamma t$$

es decir se tiene que encontrar la pendiente de la recta descrita por la ecuación anterior.

El movimiento de oscilación está fuertemente amortiguado sin llegar a estar "críticamente amortiguado" por lo que solo es posible medir dos o tres puntos de máxima (o mínima) amplitud correspondientes a múltiplos del período T . Por lo tanto, el truco que podemos emplear es hacer la primera medición en el punto correspondiente a $t = 0$, la amplitud correspondiente es obviamente $Y = A$. La medición se hace estáticamente, es decir antes de destapar el extremo del tubo al retirar el dedo. El segundo punto corresponde a $t = T$. Como estamos buscando la pendiente de una recta estos dos puntos bastarán. Sin embargo la última medición no es fácil de hacer y se tendrá que repetir varias veces para eliminar el error sistemático. Utilizando los procedimientos usuales se calcula el error.

La figura 33 muestra un posible arreglo experimental. El Laser se coloca a unos 10 cm del disco de manera que el rayo incida lo más perpendicular a la superficie del disco compacto que sea posible. Aún si no es posible una alineación perfecta, el error de medición es pequeño. De la superficie del CD se reflejará el rayo y además se difractarán diversos rayos correspondientes a los órdenes $m = \pm 1, \pm 2, \text{ etc.}$ Estos pueden observarse, por ejemplo, en una pared o en una pantalla.

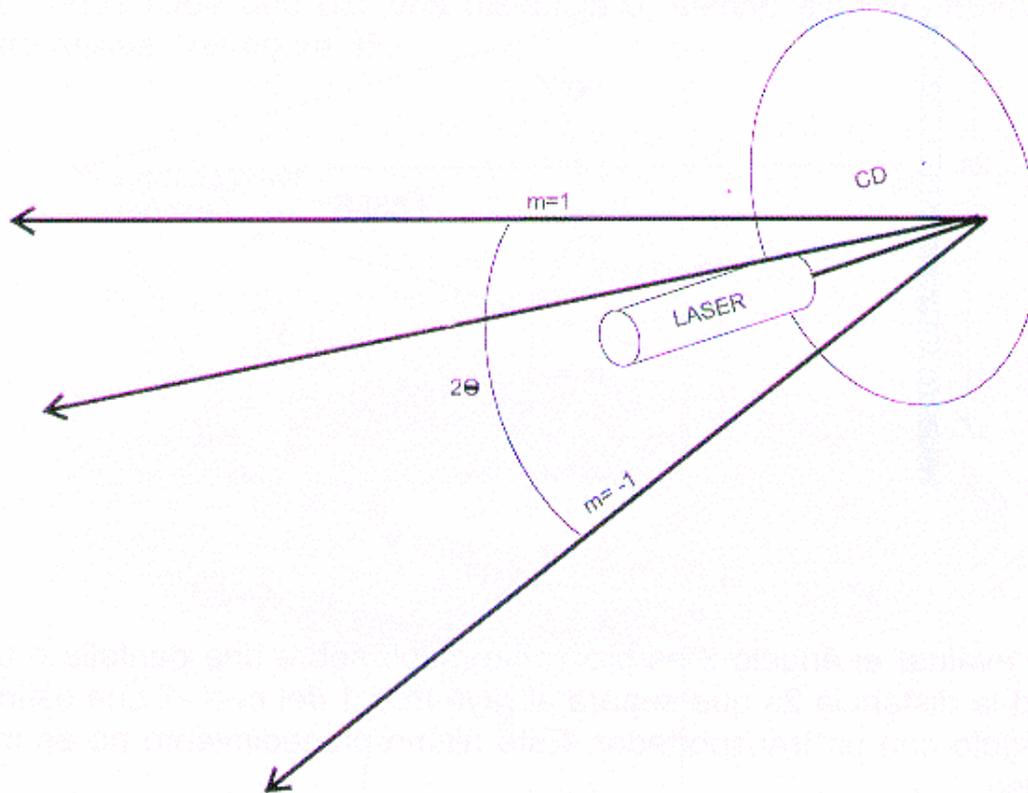


Figura 33

Para poder estimar la separación entre los surcos del disco debemos utilizar la ecuación de difracción,

$$\pm m\lambda = d \sin \theta$$

donde λ es la longitud de onda del laser que según datos del fabricante es de 680 nm, d es la distancia de separación entre franja y franja de la rejilla (surcos del disco compacto) y θ es el ángulo de difracción.

La figura 34 muestra la geometría usada para la determinación del ángulo de difracción.

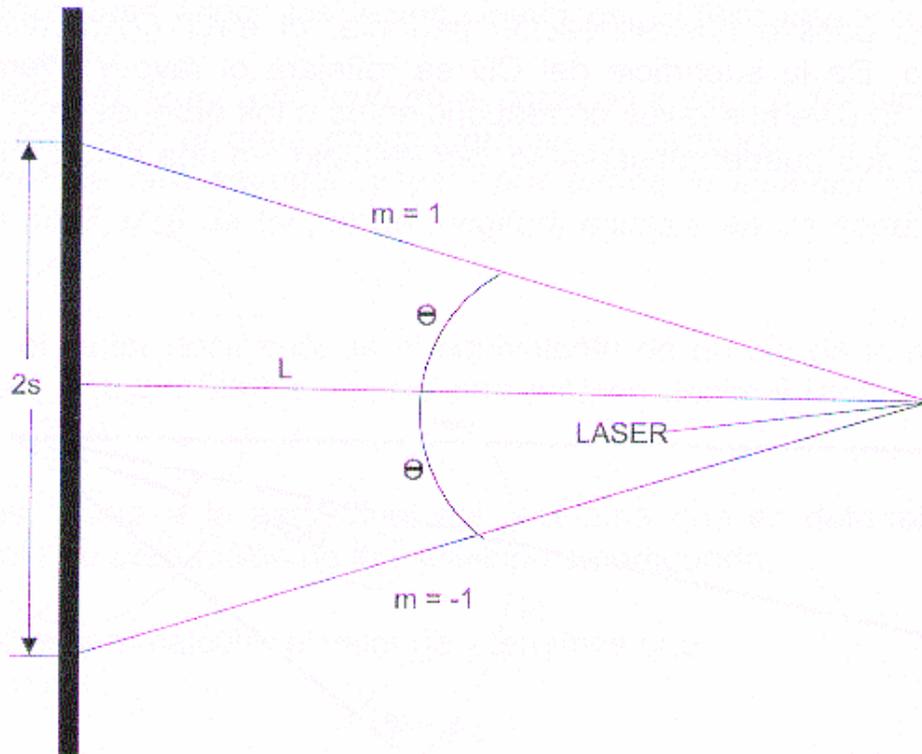


Figura 34

Para evaluar el ángulo θ es preferible medir sobre una pantalla o una pared la distancia $2s$ que separa al rayo $m = 1$ del $m = -1$ que estimar el ángulo con un transportador. Este último procedimiento no es muy preciso.

Usando el primer procedimiento, el ángulo θ es simplemente

$$\theta = \arctan s/L$$

donde L es la distancia del CD a la pantalla.

Finalmente, el valor obtenido para θ se inserta en la ecuación de difracción con $m = 1$

Experimentalmente se obtuvo un valor de $2s = 78 \pm 2$ cm y $L = 80 \pm 1$ cm. Estos valores corresponden a un ángulo $\theta = 26^\circ \pm 1^\circ$.

Insertando este valor de θ en la ecuación de difracción con $\lambda = 6.8 \times 10^{-5}$ cm y $m = 1$ resulta que $d = 15.5 \pm 0.5 \times 10^{-5}$ cm. En otras palabras se tiene una rejilla de entre 6200 a 6700 líneas por cm.

Para calcular la longitud total del surco en espiral vamos a aproximar la espiral como si fuera un conjunto de círculos concéntricos separados cada uno por una distancia d , siendo ésta la separación entre rejillas. Ver figura 35.

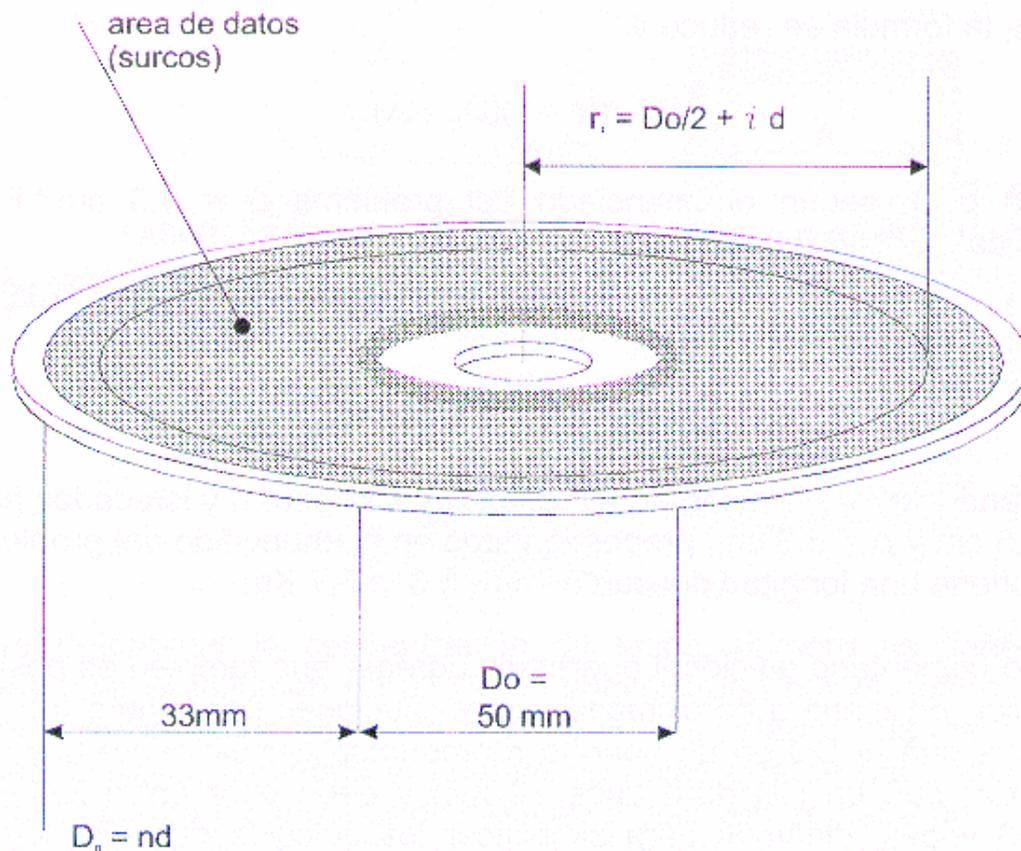


Figura 35

Con estas condiciones, el círculo más interno tendría una longitud igual a πD_o donde D_o corresponde a la distancia que limita el área de datos del CD. El siguiente círculo tendría una circunferencia igual a $\pi D_1 = \pi (D_o + 2d)$. El tercer círculo $\pi D_2 = \pi (D_1 + 2d)$ $\pi D_1 = \pi (D_o$

+ $2 \times 2d$) y así sucesivamente hasta llegar al último círculo, correspondiente al más externo cuya longitud es $\pi D_n = \pi (D_o + 2nd)$. Entonces, la longitud total " Γ " de el surco en espiral del CD es aproximadamente igual a

$$\Gamma = \pi D_o + \sum_{i=1}^n \pi D_i = \pi D_o + \pi \sum_{i=1}^n (D_o + 2id) = \pi D_o + n\pi D_o + 2d\pi \sum_{i=1}^n i$$

Simplificando,

$$\Gamma = (n+1)\pi D_o + n(n+1)\pi d$$

como nd es la anchura del área de los datos del CD que denotaremos por Δ , la fórmula se reduce a

$$\Gamma = \pi(n+1)(D_o + \Delta)$$

Ahora bien, según el enunciado del problema $\Delta = 3.3$ cm. Esto significa que el CD tiene entre,

$$n = 6200 \text{ líneas por cm} \times 3.3 \text{ cm} = 20460 \text{ líneas}$$

y

$$n = 6700 \text{ líneas por cm} \times 3.3 \text{ cm} = 22110 \text{ líneas}$$

Utilizando en la expresión para Γ estos valores para n y los dados para $D_o = 5$ cm y $\Delta = 3.3$ cm proporcionados en el enunciado del problema se obtiene una longitud del surco entre 5.3 a 5.7 Km.

Como comentario adicional queremos agregar que también es posible calcular, de manera aproximada, las revoluciones por minuto (rpm) a las que gira el CD en un aparato reproductor. Simplemente hay que recordar que un CD dura unos 70 min y debe girar entre 22110 y 20460 veces, digamos para simplificar los cálculos que gira 21000 veces. Entonces la velocidad de giro es de $21000/70 = 300$ rpm. En otras palabras, con ayuda de una regla y un apuntador Laser de longitud de onda conocida, es posible estimar la velocidad de giro de un reproductor de CDs.

E19

El Objetivo es determinar la divergencia del haz en función de la concentración de leche.

Para determinar el ángulo de dispersión es conveniente observar el tanque desde arriba y calcular el ángulo mediante la medición de los catetos del triángulo cuyas dimensiones son: A que es el ancho del tanque, $x'-h/2$ donde h es el espesor del haz láser y, $2x'$ que es el diámetro del cono de luz que se dispersa en el líquido. Como opción y para facilitar la medición de este último cateto, una de las paredes interiores del tanque puede ser cubierta con un papel o cartón blanco que sirva de pantalla para observar la proyección del cono (fig.36)

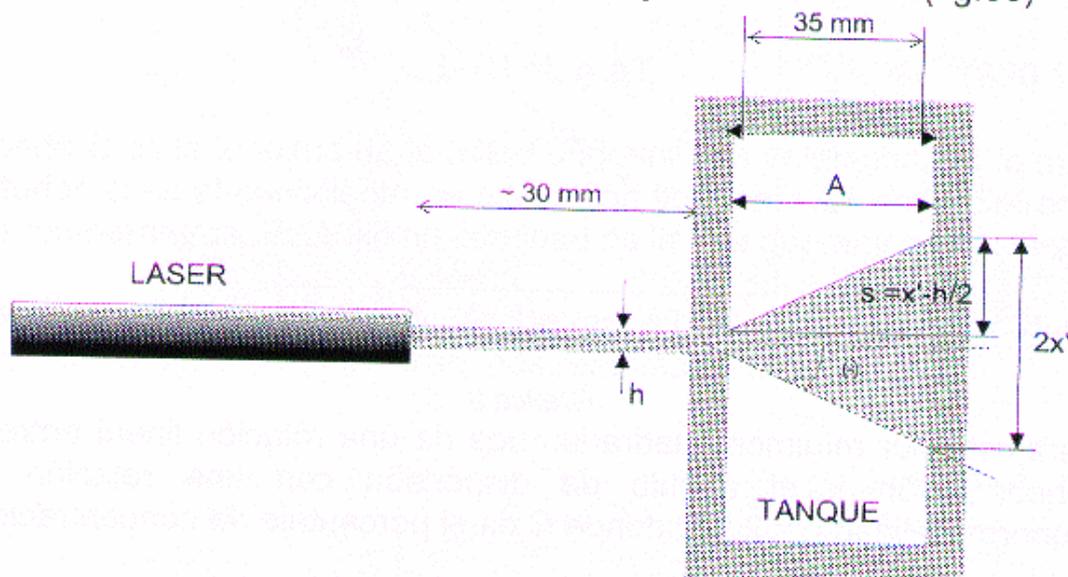


Figura 36

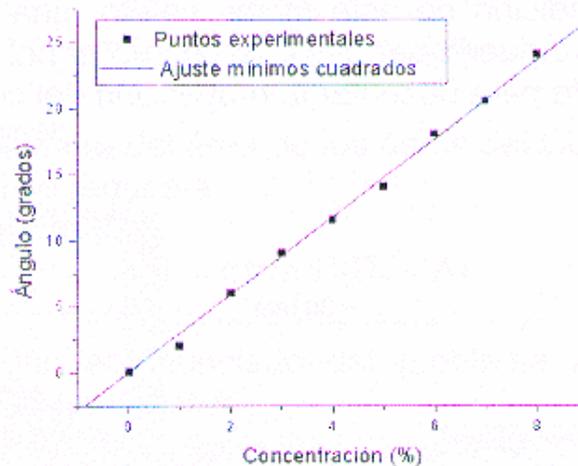
Para determinar la concentración de leche, primero se tiene que determinar el volumen de una gota suministrada por el gotero. Para este fin se llena con un gotero la jeringa hasta determinada marca, por ejemplo 10 ml, contando el número de gotas que se necesitan para llenar la marca y así poder determinar el volumen de cada una de las gotas. En nuestro caso 12 gotas llenaron la marca de 10 ml.

A continuación presentamos la tabla 6 con los resultados obtenidos par un tanque con 50 ml de agua

Tabla 6

Leche ml	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
% en volumen	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Ángulo 2Θ (°)	0	2	6	9	11.5	14	18	20.5	24

La gráfica 9 muestra el ángulo Θ versus el porcentaje de concentración.



Gráfica 9

Un ajuste por mínimos cuadrados nos da una relación lineal entre la concentración y el ángulo de dispersión con una relación de proporcionalidad $\Theta = 2.9 C$ donde C es el porcentaje de concentración.

Finalmente queremos aclarar que los resultados obtenidos son válidos para partículas grandes. Este tipo de dispersión se conoce como dispersión de Mie y no depende de la longitud de onda de la luz (λ). Cuando las partículas son pequeñas, esto es cuando su tamaño es de una décima o dos de la longitud de onda de la luz el ángulo de dispersión depende de λ^{-4} y es responsable del color azul del cielo y de los atardeceres rojos, este tipo de dispersión se conoce como de Rayleigh. Un ejemplo muy sencillo es el del humo de tabaco el cual se ve azul al humear directo del cigarrillo, pero se ve blanco al salir de la boca del fumador. Las partículas de humo se aglutinan con la humedad del aliento y por lo tanto crecen dispersando toda la luz blanca (proveniente del Sol) por igual. Las partículas pequeñas dispersan más el azul $\lambda = 460\text{nm}$ que por ejemplo el amarillo con una $\lambda = 580\text{ nm}$ y el humo se ve azul.

Para hacer el modelo, la idea es dividir al cerillo en dos mitades una superior y otra inferior. Sea L la longitud quemada del cerillo y h su anchura original. Supongamos que durante el proceso de quemado del cerillo el valor h de su anchura no cambia.

Sin embargo después de quemarse y enfriarse las longitudes de la mitad superior e inferior no son del mismo valor y por eso el cerillo se curva.

La diferencia de longitudes entre una mitad y la otra se puede expresar como,

$$I - S = L \alpha \Delta T \quad (S20.1)$$

donde S es la longitud de la mitad superior I es la longitud de la mitad inferior, α es el coeficiente de expansión térmica y ΔT es la diferencia de temperaturas. Esta última cantidad es la que queremos encontrar.

Para hacer un modelo y encontrar ΔT a partir de cantidades experimentalmente evaluables nos referimos a la figura 37.

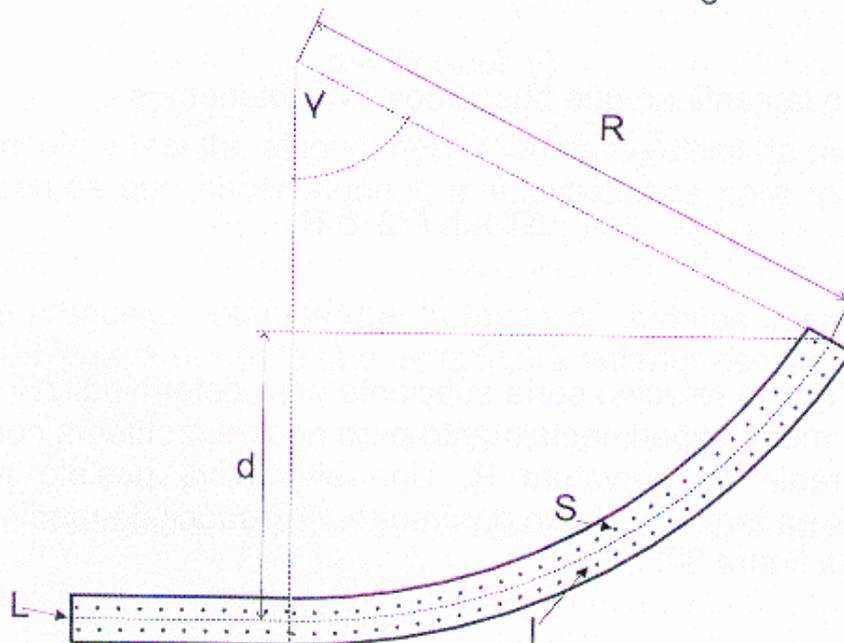


Figura 37

En la figura 37 podemos notar que los radios de curvatura de los arcos L, I y S son: R, $R + h/4$ y $R - h/4$ respectivamente donde h es el ancho del cerillo.

Los tres arcos subtenden un mismo ángulo γ y por lo tanto las longitudes de los arcos L, I y S son respectivamente $L = \gamma R$, $I = \gamma (R + h/4)$ y $S = \gamma (R - h/4)$.

Entonces la diferencia de las longitudes entre la mitad superior e inferior esta dada por

$$I - S = \gamma h/2 = (L/R) (h/2)$$

Sustituyendo esta relación en S20.1 resulta,

$$(L/R) (h/2) = L \alpha \Delta T$$

despejando la cantidad que buscamos ΔT obtenemos

$$\Delta T = h / (2 \alpha R) \tag{S20.2}$$

En principio esta relación sería suficiente para determinar ΔT ya que h es fácil de medir experimentalmente pero aquí el problema consiste en medir el radio de curvatura R. Una alternativa posible es la de expresar R en términos de un parámetro d más fácil de medir y que se define en la figura 38.

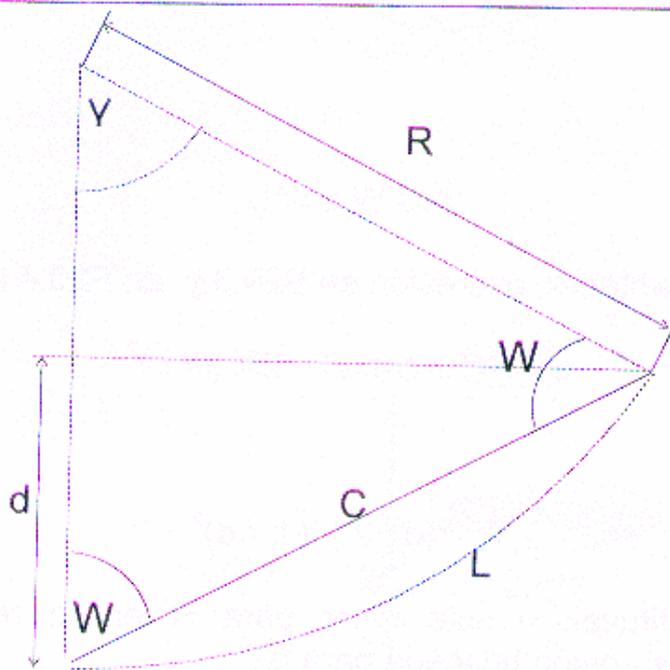


Figura 38

De la figura 38 podemos escribir que \$d\$ está relacionado al radio de curvatura \$R\$ por

$$d = R(1 - \cos \gamma) \quad (S20.3)$$

pero el ángulo \$\gamma\$ resulta, al igual que \$R\$, bastante difícil de medir por lo que tendremos que hacer algunas manipulaciones para relacionar \$\gamma\$ con \$d\$.

Para este propósito notamos que la suma de ángulos internos de un triángulo es igual a \$\pi\$, por lo que de la figura anterior escribimos,

$$\gamma = \pi - 2W$$

Utilizando identidades trigonométricas es fácil demostrar que

$$1 - \cos \gamma = 2 \cos^2 W \quad (S20.4)$$

Para ángulos pequeños, la longitud del arco \$L\$ puede aproximarse a la longitud de la cuerda \$C\$ de manera que,

$$C \cong L$$

Entonces,

$$\cos W \cong d / L$$

sustituyendo la anterior expresión en S20.3 y en S20.4 se tiene que,

$$d = R(1 - \cos \gamma) = 2R (d / L)^2$$

es decir,

$$R = (d / 2) (L / d)^2$$

finalmente sustituyendo este valor para R en la relación S20.2 obtenemos la expresión buscada para ΔT

$$\Delta T = h / (2 \alpha R) = (h d) / (\alpha L^2) \quad (S20.5)$$

Ejemplo de aplicación.

Para un cerillo de anchura $h = 1.5 \text{ mm}$ y tomando el valor de α en el intervalo = (de 5 a 10) $\cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ de acuerdo con la ecuación S20.5 y midiendo un valor experimental para $d = 1.3 \text{ mm}$ y para $L = 20 \text{ mm}$, se obtiene que, $\Delta T = (100\text{-}200)^\circ\text{C}$.

Mediciones reportadas en la literatura hechas con termopares dan una diferencia de $(80 \pm 20)^\circ\text{C}$.

El principio aquí expuesto es el mismo que se usa en la fabricación de termómetros bimetalicos. Estos consisten de la unión de dos metales de distinto coeficiente de expansión térmica de manera que al aumentar la temperatura uno se expanda más que el otro y en consecuencia el arreglo se curve. Adhiriendo una manecilla indicadora al arreglo es posible amplificar el movimiento para que la manecilla indique, en una escala graduada, la temperatura.