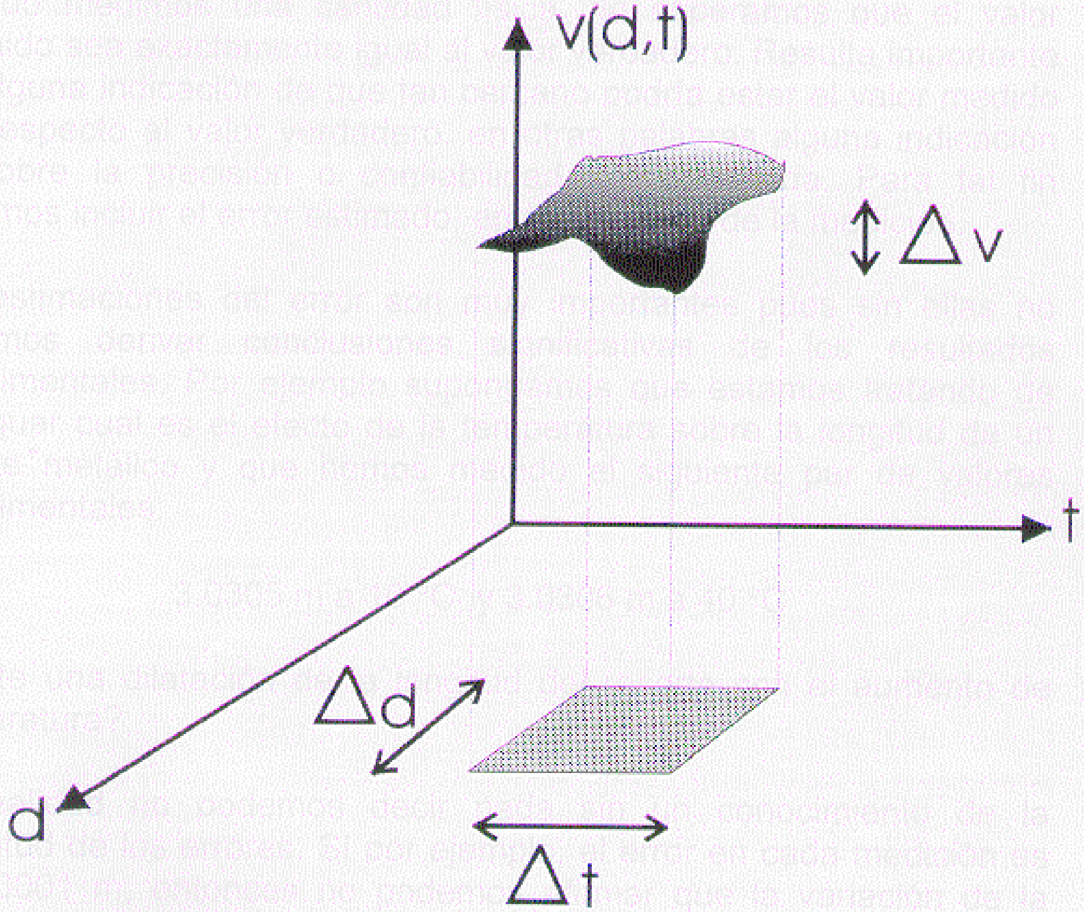
Parte 4



Tratamiento de errores

4. Tratamiento de errores.

4.1 La estimación de errores experimentales.

4.1.1 Introducción.

Cuando medimos una cantidad física, no esperamos que el valor obtenido sea exactamente igual al valor verdadero. Resulta importante dar alguna indicación de que tan cercano podría estar el valor medido con respecto al valor verdadero, en otras palabras alguna indicación de sobre la precisión o confiabilidad de la medida. Para tal fin debemos incluir el error estimado, en el resultado de la medición.

Las estimaciones del error son muy importantes pues sin ellas no podemos derivar conclusiones significativas de los resultados experimentales. Por ejemplo supongamos que estamos tratando de averiguar cual es el efecto de la temperatura sobre la longitud de un resorte metálico y que hemos medido el siguiente par de valores experimentales:

$$3.0305 \text{ m a } 10\ °\text{C} \quad \text{y } 3.0306 \text{ m a } 40\ °\text{C}$$

¿Existe una dilatación de la longitud del resorte con el aumento de temperatura?.

En realidad no podemos decir nada sin un conocimiento de la magnitud de los errores. Sí por ejemplo, el error en cada medición es de 0.0001 m, entonces no podemos afirmar que la variación de la longitud es significativa. En cambio si el error es de 0.00001 podemos afirmar que si existe una variación.

La pregunta que surge es la de cómo establecer cuales son los errores experimentales para así poder determinar su magnitud. Para contestar la pregunta, debemos clasificarlos.

4.1.2 Errores sistemáticos y aleatorios, precisión y exactitud.

Los errores pueden clasificarse en dos tipos, los errores **sistemáticos** y los **aleatorios**. Los errores sistemáticos surgen frecuentemente debido al hecho de que el dispositivo experimental funciona de manera diferente a lo que debería funcionar. Por ejemplo, un reloj que corre lento nos dará lecturas de tiempo sistemáticamente menores a las reales. Otro ejemplo podría ser el de un aparato de medición que fuera alterando sus lecturas conforme se fuera calentando durante su operación. En el primer ejemplo el error sería igual a un porcentaje constante mientras que en el segundo caso, el error variaría conforme el calentamiento del instrumento.

Los errores aleatorios están presentes siempre en un experimento y su efecto puede ser disminuido repitiendo muchas veces la medición y calculando el promedio aritmético de todas las medidas. Esto es cierto en la medida en que no existan errores sistemáticos. El repetir varias veces una medición no elimina el error sistemático aún cuando minimiza el aleatorio. Por ejemplo, pensemos en un reloj capaz de medir décimas de segundo pero imaginemos que el reloj está atrasado una hora. En este caso, las lecturas de tiempo serían menores a las reales y en consecuencia su promedio aritmético también. Si repitiéramos muchas veces las mediciones con el mencionado reloj, tendríamos como resultado una medición muy precisa pero no exacta. Cabe aquí aclarar la diferencia entre lo que debemos de entender por **precisión y exactitud** en el contexto de errores. De esta manera, se dice que un resultado es exacto si esta relativamente libre de errores sistemáticos y preciso sí el error aleatorios es pequeño.

De la discusión anterior se deduce que los errores sistemáticos son potencialmente más peligrosos que los errores aleatorios pues aunque hagamos un número muy grande de mediciones reduciendo así el error aleatorio y haciendo más preciso el resultado, el error sistemático permanece sin reducción, haciendo así al resultado inexacto.

Los errores aleatorios pueden ser estimados por métodos estadísticos, que discutiremos mas adelante. Para el tratamiento de los errores sistemáticos no existe una regla general. Son efectos que deben ser descubiertos y eliminados. Es conveniente sin embargo mantenernos alerta sobre el desempeño de los instrumentos de medición.

4.1.3 Medición de cantidades físicas

Por otro lado, la medición de cantidades físicas puede dividirse de en dos grupos. El primero es aquel en el que podemos determinar con buena precisión, el valor de la cantidad física en cuestión mediante una única medida, no siendo necesarias o indispensables un mayor número de ellas.

El segundo grupo es el de las cantidades físicas para las cuales resulta difícil determinar, mediante una sola medida, su valor con la precisión requerida por el experimento. Para este grupo resulta indispensable tomar un buen número de lecturas experimentales.

Sí el valor de una cantidad física puede determinarse con una sola lectura en un instrumento, entonces la confianza que se puede depositar en la lectura experimental está basada en el **criterio de la "mínima división" de la escala** del instrumento, es decir, la graduación más pequeña de su escala. Por ejemplo, para una regla escolar común y corriente, la división mínima esta dada al milímetro, lo que implica que el máximo error que podemos cometer, si realizamos con cuidado una medición con dicha regla, es de $\pm$ 1 mm.

4.1.4 Propagación de errores.

La mayoría de experimentos involucran la medición de varias cantidades, como por ejemplo, la temperatura, la distancia, el tiempo, etc., Estas cantidades frecuentemente deben ser incorporadas en alguna relación matemática produce como resultado final del experimento el valor de una cantidad física buscada. Dicho resultado tiene un error el cuál es el resultado de los errores de medición en las cantidades involucradas. ¿Cómo podemos calcular el error en la cantidad final a partir de los errores en dichas cantidades?.

Consideremos primero el **error relacionado con la suma o diferencia** de dos cantidades, a y b. Es decir, supongamos que queremos determinar el valor numérico de una cierta cantidad C igual a la suma las dos variables a y b, esto es,

$$C = a + b$$

Supongamos además que podemos asegurar experimentalmente que los verdaderos valores tanto de a como de b se hallan en los intervalos ($a + \Delta a$, $a - \Delta a$) y ($b + \Delta b$, $b - \Delta b$) respectivamente. Siendo Δa y Δb los errores máximos que experimentalmente podemos cometer.

El problema consiste ahora, en determinar dentro de que intervalo ($C + \Delta C$, $C - \Delta C$) se encuentra el valor de C. En otras palabras, se debe calcular cual es el valor de ΔC en función de Δa y Δb.

Comencemos diciendo que el límite superior del intervalo de valores de C resulta cuando ambos, a y b, tienen su valor máximo, esto es, $a + \Delta a$ y $b + \Delta b$ respectivamente. Entonces el límite superior del intervalo para C es

$$C_{max} = C + \Delta C = a + \Delta a + b + \Delta b$$

Análogamente, siguiendo el mismo razonamiento, el mínimo será

$$C_{min} = C - \Delta C = a - \Delta a + b - \Delta b$$

De ambos casos se infiere que

$$\Delta C = \Delta a + \Delta b$$

de tal manera que cuando una suma de variables experimentales conduce al valor de la variable por calcular, el error máximo de ésta última es igual a la suma del error individual de los sumandos. El lector puede comprobar que la misma regla se aplica a la resta. Esto es, el error en la resta es igual a la suma del error individual de los miembros de la diferencia.

A continuación trataremos el caso del **producto de variables, su cociente, o a variables elevadas a potencias**. Para este propósito, supongamos que tenemos una cantidad C dada por la siguiente expresión,

$$C = \frac{x^a y^b}{z^d}$$

Esta misma expresión puede ser escrita como,

$$C = x^a y^b z^{-d}$$

Recordemos que tenemos que determinar el error ΔC en C en términos de los errores Δx, Δy y Δz, para lo cual supongamos que todos estos errores afectan el resultado de manera tal que se obtiene un valor para C con el máximo error posible. Esto ocurre cuando los valores registrados para x y para y son los máximos dentro de sus intervalos , mientras que el valor para el divisor z es el menor dentro de su propio intervalo. Estas condiciones implicarían que

$$(C + \Delta C) = (x + \Delta x)^a + (y + \Delta y)^b + (z - \Delta z)^{-d}$$

Arreglando esta expresión se tiene,

$$C\left(1 + \frac{\Delta C}{C}\right) = x^a y^b z^{-d}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^a \left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right)^b \left(1 - \frac{\Delta z}{z}\right)^{-d}$$

pero como $C = x^a y^b z^{-d}$, cancelando en ambos miembros se llega a,

$$\left(1 + \frac{\Delta C}{C}\right) = \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^a \left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right)^b \left(1 - \frac{\Delta z}{z}\right)^{-d}$$

Hay que hacer notar que los errores Δx , Δy, Δz son pequeños comparados con las cantidades medidas **x**, **y**, **z**, de manera que los cocientes $\Delta \mathbf{x/x}$, $\Delta \mathbf{y/y}$, $\Delta \mathbf{z/z}$ son pequeños y por lo tanto los paréntesis pueden ser expandidos usando el teorema del binomio y todos aquellos términos pequeños que estén elevados al cuadrado o potencias mayores pueden ser despreciados. Esto nos da

$$\left(1+\frac{\Delta C}{C}\right)=\left(1+\frac{a\Delta x}{x}\right)\left(1+\frac{b\Delta y}{y}\right)\left(1+\frac{d\Delta z}{z}\right)$$

Multiplicando los paréntesis entre si e ignorando los productos de términos pequeños se tiene,

$$\frac{\Delta C}{C}=a\frac{\Delta x}{x}+b\frac{\Delta y}{y}+d\frac{\Delta z}{z}$$

los cocientes **$\Delta x/x$**, **$\Delta y/y$**, **$\Delta z/z$** son "errores proporcionales de cada una de las variables. Sí estos son multiplicados por 100 estos cocientes se convierten en "errores porcentuales". Esta expresión es de suma utilidad para calcular rápidamente errores y su uso es común por su simplicidad , ya que no importa si la variable esta en el numerador o denominador pues su error proporcional correspondiente siempre se suma. Sin embargo es importante aclarar que el error así calculado **corresponde al máximo error posible** y tiene que ser indicado como tal. El error probable siempre será menor.

4.2 Tratamiento estadístico de datos

4.2.1 Introducción.

Supongamos que realizamos un conjunto de mediciones de una misma cantidad y que estas medidas están libres de error sistemático. Estas medidas tendrán valores diferentes ya que siempre estará presente el error aleatorio. Para ejemplificar tomemos por caso el experimento **E 1** "El tubo de Sandor Mikola". En este experimento, se tienen que medir los tiempos que tarda una burbuja en recorrer una distancia dada (en este caso 50 cm) dentro de un tubo transparente, para distintas inclinaciones del mismo tubo. Durante el experimento, se midieron 5 tiempos para cada ángulo de inclinación. La tabla 7 reproduce los valores de las mediciones para dos ángulos 10° y 50° correspondientes a velocidades lenta y rápida de la burbuja respectivamente. Como era de esperarse, se observa en ésta tabla que ninguna medición tiene valores iguales entre si. Además la tabla incluye el **promedio aritmético** de la mediciones. Al promedio, que denotaremos por x_p, lo tomamos como **el mejor resultado de nuestras mediciones.** La pregunta que surge es que tan cercano es el valor de x_p al valor verdadero de la cantidad que queremos medir, valor que denotaremos por **X**.

Tabla 7

Ángulo	**Medidas en segundos**					Promedio
	T1	T2	T3	T4	T5	
10°	15.78	14.63	14.81	15.16	15.09	15.09
50°	4.33	4.35	4.61	4.95	4.67	4.58

Para resolver esta pregunta, es conveniente ahora calcular el porcentaje de desviación de cada una de las mediciones con respecto al promedio. Por ejemplo, en el caso del tiempo marcado como T1 = 15.78 s dicho porcentaje es igual a {(15.78 –15.09) / 15.09}x 100 = 4.6%. Esto mismo lo podemos hacer para cada uno de los tiempos y escribir los resultados. Estos se muestran en la tabla 8

Tabla 8

Ángulo	**Porcentajes de desviación con respecto al promedio**				
	T1	T2	T3	T4	T5
10º	4.6%	-3.05%	-1.86%	0.46%	0.0%
50º	-5.46%	-5.02%	0.66%	8.08%	1.97%

La figura 39 ilustra de manera gráfica la dispersión de los resultados mostrados en la tabla 8 .Cada rayita sobre la línea representa la dispersión con respecto al promedio. La figura 39 está a escala para mostrar la dispersión de los resultados.

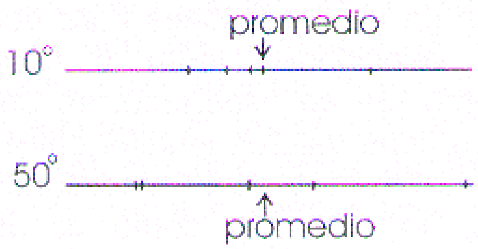


Figura 39

Se observa en la figura anterior que los valores medidos para los tiempos están más dispersos en el caso de 50º que para el caso de 10º. De aquí que resulta claro esperar que el promedio x_p para 10º esté más cercano al verdadero valor de X para ese ángulo, que el promedio x_p para 50º para su respectivo X..En otras palabras, esperamos que x_p este mas cerca del valor X cuando los datos se dispersen menos, o bien, mientras mayor sea la dispersión en las medidas mayor será el error esperado para el valor promedio x_p .

Lo anterior nos proporciona un criterio para calcular el error. Este criterio está basado en la estimación estadística de la dispersión de las medidas. Esta dispersión dependerá de cómo se distribuyen las mediciones.

4.2.2 Distribución de medidas.

Para comenzar la discusión tenemos que formalizar matemáticamente lo que hemos discutido. Para ello supongamos que tenemos un conjunto de medidas que denotaremos por:

$$x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$$

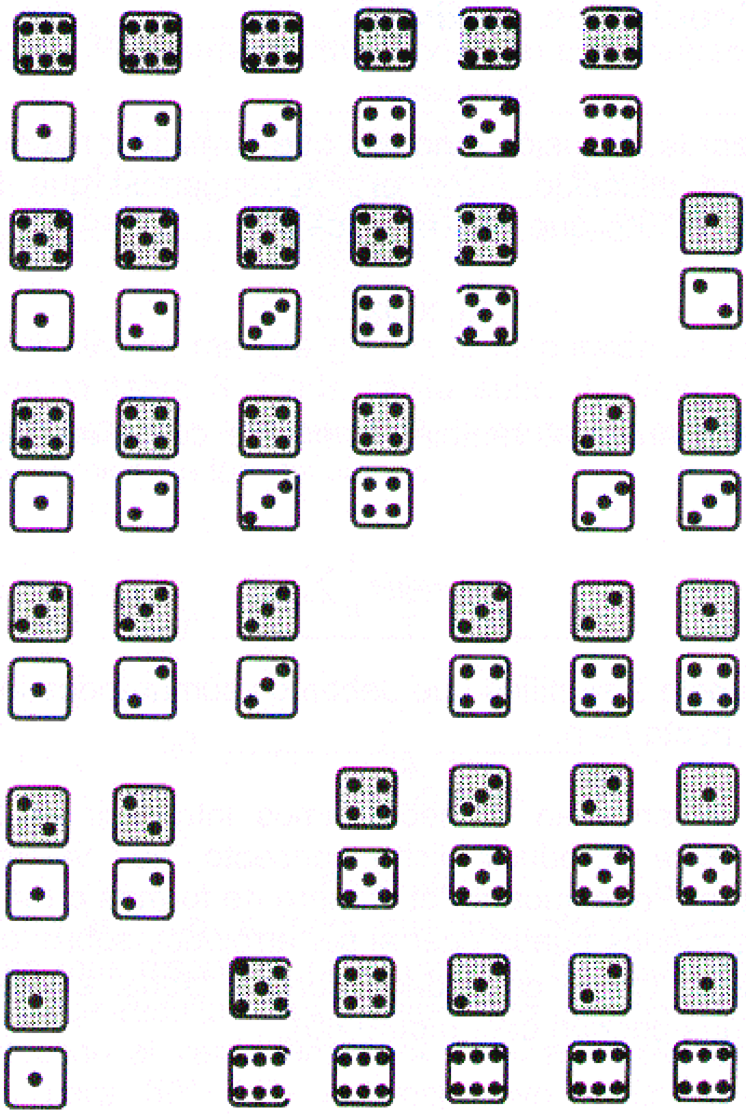
Definimos el **promedio**, también conocido como **media** o el **valor medio**, por,

$$x_p = \frac{1}{n}\sum x_i$$

Donde el símbolo Σ significa que debemos sumar todos los valores de x_i desde i =1 hasta i = n.

Par estimar el error en x_p necesitamos introducir el concepto de distribución. Para introducir dicho concepto, nos valdremos de un ejemplo simple. Pensemos en el número de formas o maneras en las que un par de dados puede caer al ser arrojados sobre, digamos, una mesa de juego. Como cada dado tiene 6 lados, existen 6×6 = 36 maneras en que puedan caer (figura 40).

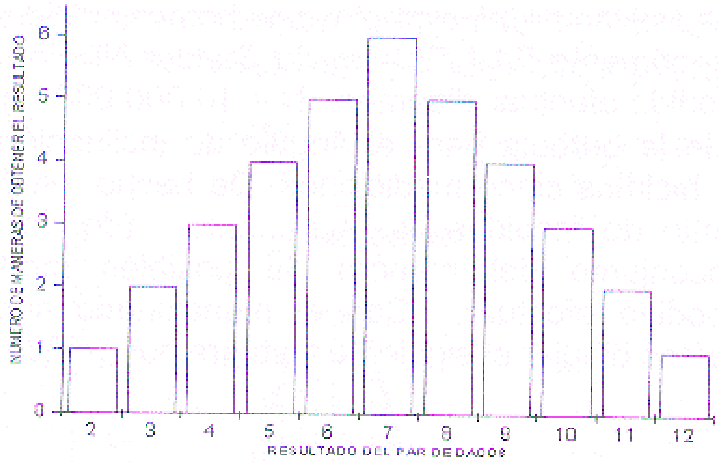
En un juego de mesa es común sumar los números que aparecen en cada par de caras superiores. La suma de cada par puede dar los siguientes resultados: 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 y 12 También observamos que solo hay una forma de producir un 2 o un 12. Esto es tirando dos unos y dos seises respectivamente (ver figura 40). Siguiendo este mismo análisis podemos determinar la forma de obtener cualquiera de los otros resultados, por ejemplo, un siete se puede obtener de seis maneras 1+ 6 , 2 + 5, 3 + 4, 4 + 3, 5 + 2 y 6+1 (ver figura 40)



Las 36 diferentes maneras en las que pueden caer un par de dados

Figura 40

Es de utilidad graficar el conjunto de resultados que se obtienen al tirar los dados, contra el número de maneras distintas de obtenerlos. (ver grafica 10) Lo que la gráfica 10 muestra es como se distribuyen los eventos en relación al resultado que producen. Esto es lo que llamamos un *histograma*.



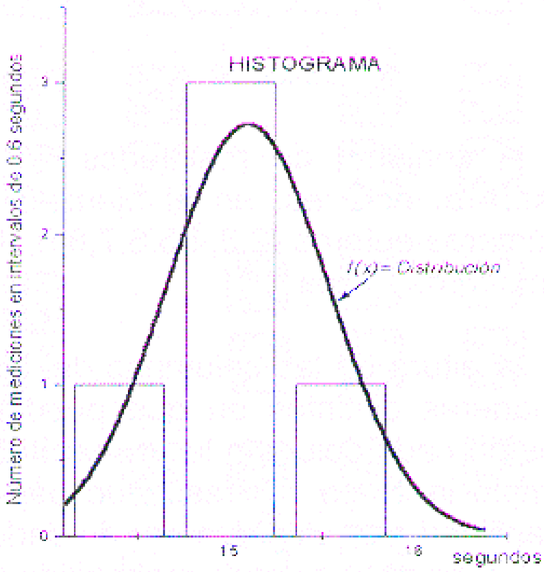
Gráfica 10

Cabe aclarar que el conjunto de resultados de este ejemplo es **discontinuo o discreto,** esto es, en el ejemplo de los dados se obtienen solo los números enteros {2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 y 12} y no se obtienen todos los números reales..

Si ahora dividimos la altura de las columnas del histograma entre el número total de maneras distintas en que pueden caer el par de dados, obtendremos en cada columna la **probabilidad** de que ocurra el evento. Por ejemplo la altura del resultado para 7 es de 6, esto implica que la probabilidad que caiga un par de dados marcando 7 es igual a 6 / 36 = 1/ 6 que es mayor que la probabilidad de que los dados nos den un doce, que es igual a 1 / 36. Si a continuación graficamos el conjunto de eventos contra la probabilidad de que estos ocurran, obtendremos lo que se conoce como la **distribución de los eventos**. Es importante remarcar que en este caso se obtiene una **distribución discreta**, por las razones anteriormente mencionadas. Sin embargo, es pertinente mencionar que existen **distribuciones continuas** de las cuales hablaremos en seguida.

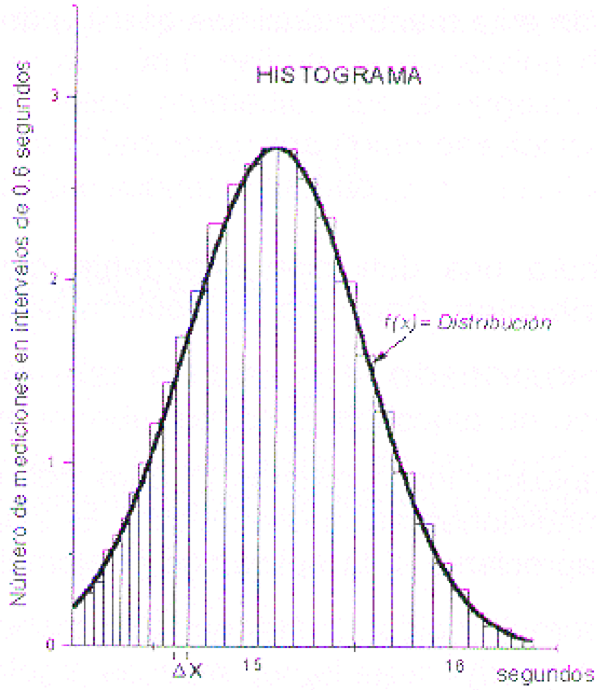
4.2.3 Distribuciones continuas.

En un experimento es posible, en principio, realizar un conjunto muy numeroso de medidas. Sin embargo, por razones prácticas, existen muchas causas que nos obligan a restringir severamente el número de ellas. Estas causas pueden ser, el tiempo que lleva el hacer una medición, su costo, la estabilidad de los instrumentos etc. Para fijar nuestras ideas volvamos al ejemplo que hemos venido manejando, esto es, el experimento E1 " El tubo de Sandor Nikola". En principio hubiéramos podido efectuar digamos, N = 10 000,000 mediciones de la velocidad de la burbuja para el ángulo de inclinación de 10°, sin embargo solo hicimos cinco mediciones. De hecho, en éste ejemplo, nuestro conjunto de medidas, x_1, x_2,x_3.......x_n (donde n =5) es un pequeño subconjunto del número de posibles mediciones que hubiéramos podido efectuar. Con el mencionado subconjunto de medidas podemos dibujar el siguiente histograma(gráfica 11).



Gráfica 11

El histograma de la gráfica 11 muestra una apariencia escalonada porque representa pocos valores (5 medidas). Sin embargo, hagamos un esfuerzo mental y supongamos que es posible hacer muchas más mediciones de tal manera que el número N de ellas sea muy grande. Esto nos permitiría disminuir la anchura de las columnas y a al mismo tiempo tener un número apreciable n_i de mediciones en cada columna. La gráfica 12 muestra el nuevo histograma para la situación hipotética en que tuviésemos un número muy grande de mediciones. Ahora bien, si graficamos en lugar del histograma la fracción del número total de medidas, esto es n_i/N, en función del valor x de la medición, obtendremos una curva suave f(x) conocida como función de distribución. El significado de esta función es que $f(x)\Delta x$ donde Δx es el ancho de la columna representa la fracción del total de las N mediciones que caen en la columna situada entre x y $x + \Delta x$.



Gráfica 12

Si ahora, hacemos tender la anchura de la columnas a cero ($\Delta x \rightarrow dx$), podemos entonces decir que $f(x)dx$ es la probabilidad de que una sola medida, tomada al azar de la distribución, caiga en el intervalo x y x + dx.

Es importante señalar que la suma de todas las probabilidades para todos los casos posibles debe ser igual a la unidad. Para aclarar este punto, mencionaremos como ejemplo al juego de "los volados". En este juego, la probabilidad de que una moneda arrojada al aire "caiga águila" es de ½ y de que "caiga sol" es también de ½, por lo que la suma de las probabilidades de todas las formas en que puede caer una moneda (en este caso de solo dos formas) es igual a la unidad (½ + ½ =1). De igual manera, el lector puede cerciorarse de que en el juego del par de dados, las probabilidades de que ocurran respectivamente los siguientes eventos {2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 y 12} son (1/36, 2/36, 3/36, 4/36, 5/36, 6/36, 5/36,4/35,3/36,2/36 y 1/36) respectivamente . La suma de estas fracciones es igual a la unidad.

Cuando se tiene una suma infinita de cantidades la suma se convierte en una integral, de esta manera decimos que f(x) debe satisfacer la relación

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Introduzcamos ahora una definición importante conocida como la **media de la distribución**. Para una distribución discreta esta puede definirse como

$$< x >= \sum x_i \frac{n_i}{N}$$

donde hemos empleado los corchetes ⟨⟩ para denotar el promedio sobre todas las mediciones en la distribución. El significado de esta definición puede apreciarse si la aplicamos al ejemplo de los dados. En este caso,

$$\langle x \rangle = 2\frac{1}{36} + 3\frac{2}{36} + 4\frac{3}{36} + 5\frac{4}{36} + 6\frac{5}{36} + 7\frac{6}{36} + 8\frac{5}{36} + 9\frac{4}{36} + 10\frac{3}{36} + 11\frac{2}{36} + 12\frac{1}{36} = 7$$

El resultado corresponde al valor 7 que es el evento con mayor probabilidad de ocurrencia. Hay que hacer notar que la definición de <x> tiene sentido, ya que cada valor de x es ponderado o está "pesado" por n_i /N que representa la probabilidad de que el evento caiga en el valor x_i.

En el caso de una distribución continua la definición esta dada por

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

donde de nuevo, la importancia de esta definición radica en que, en ausencia de error sistemático y dado que el número de mediciones es muy grande, la media de la distribución <x> puede ser tomada como el valor experimental verdadero que denotaremos por X, esto es, con una equis mayúscula con una barra encima. De nuevo, hay que hacer notar que la definición de <x> para una distribución continua también tiene sentido, ya que cada valor de x es ponderado o está "pesado" por *f(x)dx* que representa la probabilidad de que la medición caiga entre x y x + dx.

Hasta el momento no hemos especificado la forma exacta de la distribución *f*(x) ni de cómo estimar la dispersión de las mediciones alrededor de un valor promedio. En el siguiente apartado (4.3) definiremos una cantidad, conocida como desviación estándar la cual es una medida de la dispersión de datos.

4.3 La desviación estándar

4.3.1 Error estándar en una sola observación

En este apartado introduciremos el concepto de desviación estándar como una medida de la dispersión de las mediciones. Para este propósito es conveniente definir lo que se entiende por error en una sola medición.

Si X es el verdadero valor de una variable y durante un experimento se obtiene un valor x, es claro que el error ε que estamos cometiendo para esa medición es igual a la desviación entre el valor medido x y el valor verdadero X. Esto es,

$$\varepsilon = X - x.$$

Evidentemente que ε puede tomar tanto valores negativos como positivos por lo que es conveniente elevar al cuadrado a dicha cantidad y al igual que en el caso de la media <x> , definida en el apartado anterior, ponderar o "pesar" la cantidad ε^2 en forma idéntica, para así obtener una media $<\varepsilon^2>$. De nuevo insistimos que ésto tiene sentido, ya que cada valor de ε^2 es ponderado o está "pesado" por *f(x)dx* que representa la probabilidad de que la medición caiga entre x y x + dx.

La raíz de $<\varepsilon^2>$ se denota por σ y se conoce como **desviación estándar de la distribución** y se define por la ecuación

$$\sigma^2 = \langle \varepsilon^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - X)^2 f(x) dx$$

La cantidad σ^2 recibe el nombre de **varianza de la distribución**.

La desviación estándar es una medida de la forma en que se esparce la distribución. Una σ muy pequeña significa que los valores experimentales se encuentran constreñidos a un intervalo angosto mientras que una σ grande implica que los valores experimentales se encuentran esparcidos en un intervalo de valores amplio. En otras palabras σ nos índica la precisión en la medición. Por lo tanto, es lógico tomar a σ como una medida del error de una sola observación.

Pero la pregunta que surge es la de, ¿cómo especificar el error en la media de un conjunto de n mediciones.?

4.3.2 Error estándar en la media

Para fijar nuestras ideas volvamos a nuestro ejemplo de marras (experimento E1) y consideremos las 5 mediciones que aparecen en la tabla 9 para una inclinación de 10°.

Tabla 9

Ángulo	Medidas en segundos					Promedio
	T1	T2	T3	T4	T5	
10°	15.78	14.63	14.81	15.16	15.09	15.09

Supongamos, ahora que volvemos a tomar de nuevo otros cinco tiempos y a calcular el promedio para este nuevo conjunto. Este nuevo valor lo escribimos en una tabla junto con el primer promedio que es de 15.09 segundos. Repetimos el proceso muchas veces para terminar con una tabla consistente en la distribución de los promedios . Denotamos la desviación estándar de esta segunda distribución como σ_m y lo llamamos error estándar de las medias.

En resumen σ es la desviación estándar de la distribución de una sola medida.

Mientras que σ_m es la desviación estándar de la distribución de las medias de un conjunto de medidas, cada una de las cuales contiene el mismo número de n medidas individuales (en este caso cinco).

Para sintetizar, σ representa el error en una sola medida y σ_m representa el error al calcular el promedio de n mediciones.

4.3.3 Relación entre σ_m y σ

A continuación demostraremos una importante relación entre σ_m y σ.

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Pero primero indicaremos en que reside la importancia de esta expresión.

Esta expresión nos indica que el error estándar en el promedio de n observaciones es $1/n^{1/2}$ veces el error en una sola observación. El valor de σ depende de la precisión de las mediciones individuales y es independiente del número de ellas, mientras que el valor de σ_m puede ser reducido incrementando el número n de mediciones. La tabla 10 muestra como se reduce σ_m.

Tabla 10

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	20
$1/n^{1/2}$	1	0.707	0.577	0.5	0.447	0.408	0.378	0.354	0.333	0.224

Es de notar que σ_m disminuye lentamente conforme aumentamos el número de mediciones, por ejemplo si queremos reducir el error en la mitad, al tomar cinco medidas, debemos de efectuar quince mediciones más para llegar a un total de veinte ($1/5^{1/2} \approx 2 \times 1/20^{1/2}$). Esto puede resultar muy costoso o consumir mucho tiempo. Muchas veces será mejor tratar de disminuir el valor de σ_m reduciendo el error σ en las mediciones individuales.

4.3.4 Cálculo de σ y σ_m

Vamos ahora a mostrar como se pueden estimar σ y σ_m a partir de mediciones reales. Solo es necesario indicar como se calcula una de ellas ya que ambas están relacionadas entre si.

En principio podríamos partir de la definición de σ,

$$\sigma = \left[\left(\frac{1}{n}\right)\sum \varepsilon_i^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

El problema con esta expresión es que no podemos calcular las $\varepsilon_i = (x_i - \mathbf{X})$ ya que no conocemos el valor verdadero **X**. Sin embargo podemos suponer que éste es muy cercano a la media por lo que definimos una nueva cantidad s llamada **desviación estándar de la muestra** como,

$$s = \left[\left(\frac{1}{n}\right)\sum d_i^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Donde $d_i = (x_i - X)$ es el residuo de la i –ésima medición. La cantidad s si se puede conocer.

Si definimos el error de la media E como la diferencia entre la media y el valor verdadero, esto es,

$$E = X - \mathrm{X}$$

y recordando que

$$\varepsilon = \mathrm{x} - \mathrm{X}$$

podemos escribir,

$$x_i - \overline{X} = \varepsilon_i - E$$

Por lo que

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum\left(x_i - \bar{x}\right) = \frac{1}{n}\sum(\varepsilon_i - E)^2$$
$$= \frac{1}{n}\sum\varepsilon_i^2 - 2E\frac{1}{n}\sum\varepsilon_i + E^2$$
$$= \frac{1}{n}\sum\varepsilon_i^2 - E^2$$

Esto es válido para un solo conjunto de n mediciones. Si ahora tomamos el promedio para un gran número de conjuntos obtenemos el siguiente resultado

$$\left\langle s^2\right\rangle = \left\langle\frac{1}{n}\sum\varepsilon_i^2 - E^2\right\rangle = \left\langle\frac{1}{n}\sum\varepsilon_i^2\right\rangle - \left\langle E^2\right\rangle$$
$$= \left\langle\varepsilon^2\right\rangle - \left\langle E^2\right\rangle$$
$$= \sigma^2 - \sigma'_m$$

En el apartado 4.3.3 vimos que σ y σ_m están relacionadas por $\sigma_m = n^{1/2}\sigma$. Sustituyendo esta relación en la expresión anterior se obtiene,

$$\sigma^2 = \frac{n}{n-1}\left\langle s^2\right\rangle,$$

y

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{n-1}\left\langle s^2\right\rangle$$

Conocemos a la cantidad $<s^2>$ y si calculamos la raíz cuadrada de las dos expresiones anteriores obtenemos dos formulas para calcular σ y σ_m

$$\sigma = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{1}{n}\right)\sum d_i^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\sigma_m = \left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{1}{n}\right)\sum d_i^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

4.3.4.a Ejemplo de aplicación

Como muestra volvemos a nuestro ejemplo de marras, esto es experimento E1 y vamos a calcular σ y σ_m para este caso. La tabla 11 muestra los resultados de para el ángulo de inclinación de 10°.

Tabla 11

Ángulo	Medidas en segundos					Promedio
	T1	T2	T3	T4	T5	
10°	15.78	14.63	14.81	15.16	15.09	15.09

Lo primero que hay que hacer es calcular cada una de los residuos , por ejemplo para T1 se tiene,

T1 = 15.78 – 15.09 = 0.68.

Cuyo valor al cuadrado es igual a 0.4624. La tabla 12 muestra los residuos y sus cuadrados.

Tabla 12

	Residuos y sus cuadrados					Σd^2
	T1	T2	T3	T4	T5	
d	0.68	-0.46	-0.28	0.07	0	
d^2	0.4624	0.2116	0.0784	0.0049	0	0.7573

La suma de los residuos al cuadrado dividida entre cinco medidas resulta ser igual a s^2

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum d_i^2 = \frac{0.7573}{5} = 0.15 \qquad \Rightarrow \qquad s = 0.4 \quad \text{segundos}$$

$$\text{de donde} \quad \sigma = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} s = \sqrt{\frac{5}{4}} \times 0.4 \quad \text{segundos} = 0.45 \quad \text{segundos}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.45}{\sqrt{5}} = 0.2 \quad \text{segundos}$$

El resultado final para el tiempo correspondiente a la inclinación de 10° es T(10°) = 15.09 ± 0.45 s

4.4 Incertidumbre en funciones

4.4.1 Cálculo de propagación de errores

En la mayoría de los experimentos no medimos la cantidad que nos interesa directamente sino por lo contrario tenemos que medir primero ciertas cantidades para poder determinarla. Tal es el caso del experimento de la burbuja E1, la cantidad que nos interesa es la velocidad terminal "v" de una burbuja dentro de un tubo transparente lleno de agua. Para esto tenemos que medir la longitud del recorrido de la burbuja "d" y dividir esta cantidad entre el tiempo "t" que tarda en recorrer la mencionada distancia. La relación funcional que requerimos se puede expresar como,

$$v = \frac{d}{t}$$

En este ejemplo la distancia d se mide con ayuda de una regla y el su valor resulta ser d = 50 ± 0.1 cm. La estimación del error la hemos hecho suponiendo que el máximo error posible al posicionar el extremo de la regla en la primera marca que cruza la burbuja es igual a la mitad de la mínima división de una regla milimetrada, y, de manera análoga el error al estimar la posición de la segunda marca es también la mitad de la mínima división, esto es medio milímetro. Sumando ambos errores obtenemos el citado error de 0.1 cm.

En la medición del tiempo que tarda en recorrer la burbuja la distancia d, tomamos como el valor mas probable del tiempo al promedio de las mediciones realizadas y a su error como la desviación estándar de las mismas.

El problema que vamos a considerar es como calcular el valor del error Δv en la velocidad v a partir de los valores de los dos errores, Δt y Δd, correspondientes las dos mediciones, t y d.

Lo primero que suponemos es que ambas cantidades son independientes entre sí, y sí ambas cantidades son independientes, sus errores también lo serán. Es decir que el medir una variable no afecta la medición de la otra cantidad. En nuestro ejemplo específico queremos decir que medir el tiempo que transcurre al recorrer la burbuja una distancia d no afecta la medición de esa distancia. Sin embargo hay que advertir, aunque este no es el caso, que existen situaciones en las cuales las variables no son independientes.

Por definición, la velocidad depende del tiempo y de la distancia. Matemáticamente podemos expresar esta dependencia de v en función de d y t de la siguiente manera,

$$v = v(t,d)$$

Supongamos ahora que realizamos una sola medición de t y de d. Cada par de estas mediciones presentan su respectivo error al que denotaremos por Δt_i y Δd_i respectivamente de manera que entonces podemos escribir

$$\Delta t_i = t_i - t_o \ , \quad \Delta d_i = d_i - d_o,$$

donde t_o y d_o son los verdaderos valores de t y de d.

Para simplificar nuestra argumentación prestemos atención a una sola de las variables, digamos d, y supongamos que el error $\Delta d_i = d_i - d_o$, que cometemos al medir d, es tan pequeño que los puntos $v(d_o)$-$v(d_i)$ también se encuentran muy próximos y por lo tanto v(d) en esa pequeña región puede representarse aproximadamente por una línea recta como mostramos en la figura 41.

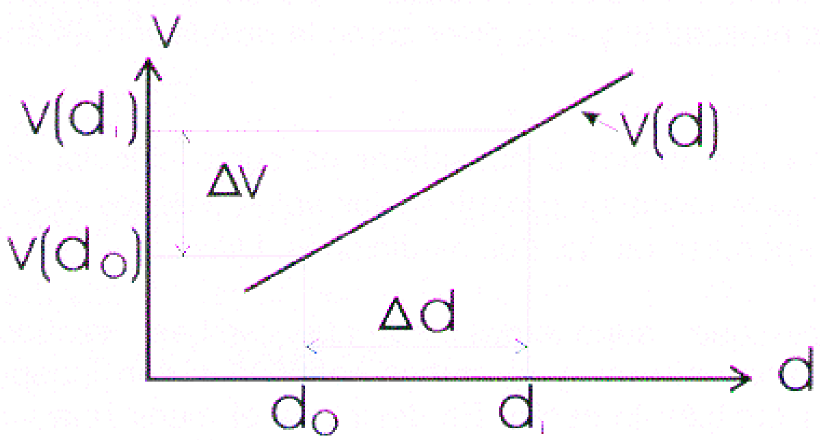


Figura 41

Resulta claro que el error Δv es función de Δd y que dicha función puede expresarse de la siguiente manera,

$$\Delta v = v(d_o + \Delta d) - v(d_o)$$

dividiendo esta expresión entre Δd y suponiendo que el error en d es pequeño se obtiene que

$$\lim_{\Delta d \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta d} = \lim_{\Delta d \to 0} \frac{v(d_o + \Delta d) - v(d_o)}{\Delta d} = \frac{dv}{dd}$$

Por otro lado, la figura 41 nos muestra que Δv es proporcional a Δd y que la constante de proporcionalidad resulta ser la pendiente, esto es, la derivada de la función v(d) calculada en $d=d_o$ Entonces podemos escribir para el error en v originado al medir d como

$$\Delta v_i^d = \frac{dv}{dd} \Delta d_i$$

De manera análoga podemos extender el resultado a la otra variable del ejemplo, esta es t , para escribir,

$$\Delta v_i^t = \frac{dv}{dt} \Delta t_i$$

El error total para una medición será la suma de las dos contribuciones, esto es

$$\Delta v_i = \frac{\partial v}{\partial d} \Delta d_i + \frac{\partial v}{\partial t} \Delta t_i$$

Ahora bien, para un conjunto de mediciones el cuadrado de la desviación estándar será, por definición igual a,

$$\sigma^2(v) = \frac{1}{n} \sum_i^n (\Delta v_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_i^n \left(\frac{\partial v}{\partial d} \Delta d_i + \frac{\partial v}{\partial t} \Delta t_i \right)^2$$

desarrollando el binomio se tiene

$$\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial d}\Delta d_i+\frac{\partial v}{\partial t}\Delta t_i\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial d}\Delta d_i\right)^2+\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\Delta t_i\right)^2+$$
$$2\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial d}\Delta d_i\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\Delta t_i\right)$$

Pero el ultimo término es igual a cero

$$2\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial d}\Delta d_i\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\Delta t_i\right)=0$$

La explicación es simple ya que hay que recordar que d y t son variables independientes lo que implica que habrá veces en que el error en una medición Δd_i sea positivo mientras que su correspondiente Δt_i sea negativa o viceversa, o bien que ambos tengan el mismo signo. Este hecho a su vez indica que el producto de los pares de errores $\Delta d_i \times \Delta t_i$ puede ser positivo o negativo, además, independientemente de su signo, el producto puede ser de gran o de pequeña magnitud. El punto importante es que hay que acordarse que la distribución tiene un número infinito de valores posibles lo que da un número infinito de productos de pares, tanto positivos cómo negativos, los que al sumarse se cancelan.

Finalmente, eliminando el último término y recordando la definición de desviación estándar obtenemos la siguiente regla,

$$\sigma(v)^2=\sigma(d)^2+\sigma(t)^2$$

Este resultado tan simple se puede fácilmente generalizar a funciones que dependan de más de dos variables. Si F es una función de a, b, c etc. Entonces la regla general, para las desviaciones estándard será,

$$\sigma(F)^2=\sigma(a)^2+\sigma(b)^2+\sigma(c)^2+\ldots \qquad \text{(TE4.1)}$$

4.4.1.a Ejemplo de aplicación.

Regresando al ejemplo de la burbuja vamos a aplicar la regla general a este caso.

$$(\Delta v)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial d}\Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\Delta t\right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial d}\left(\frac{d}{t}\right)\Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{d}{t}\right)\Delta t\right)^2 = \left(\frac{1}{t}\Delta d\right)^2 + \left(-\frac{d}{t^2}\Delta t\right)^2$$

Para simplificar este resultado podemos dividir a toda la ecuación entre v = d / t para obtener,

$$\left(\frac{\Delta v}{v}\right)^2 = \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2$$

Como ejemplo, vamos a utilizar los valores para un ángulo de inclinación de 10°, Los valores para Δt y Δd fueron ya calculados con anterioridad. En este caso, la estimación final para t ya fue calculada en el apéndice 4 y para d fue calculada al principio del presente apéndice. Los valores con sus errores obtenidos son,

$$t(10°) = 15.09 \pm 0.45 \text{ s}$$

y

$$d = 50 \pm 0.1 \text{ cm}$$

Entonces para t se tiene,

$$\left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2 = \left(\frac{0.45}{15.09}\right)^2 \cong 8.9$$

Para el caso de la distancia d se tiene que,

$$\left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 = \left(\frac{0.1}{50}\right)^2 = 0.000004$$

Finalmente el error total será

$$\Delta v = (8.9+0.000004)^{1/2} \cong \pm 3.0 cm/s$$

Hay que resaltar que en este ejemplo particular la contribución al error para el caso de la distancia d es muy pequeño y puede ser despreciado.

4.4.2 Relaciones entre errores estándar.

Finalmente proporcionamos al lector en la tabla 13 , algunas relaciones comunes para una función F que dependa de variables a y b. Estas relaciones pueden ser fácilmente calculadas a partir de la formula general para calcular errores dada por la ecuación TE4.1,

TABLA 13
Relaciones entre errores estándar.

F = F (a,b)	Relación entre σ(F), σ(a) y σ(b)
F=a+b F=a-b	$(\sigma(F))^2 = (\sigma(a))^2 + (\sigma(b))^2$
F = a b F = a / b	$\left(\frac{\sigma(F)}{F}\right)^2 = \left(\frac{\sigma(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma(b)}{b}\right)^2$
$F = a^n$	$\frac{\sigma(F)}{F} = n\frac{\sigma(a)}{a}$
F = ln a	$\sigma(F) = \frac{\sigma(a)}{a}$
F = exp a	$\frac{\sigma(F)}{F} = \sigma(a)$

4.5 Ajuste de líneas rectas.

4.5.1 El método de mínimos cuadrados.

Consideremos el caso en que una cantidad "y" es función lineal de otra cantidad "x", de manera que las mediciones son pares de valores (x,y). La función es descrita por,

$$y = mx + b$$

El problema consiste en calcular los valores para los parámetros m y b a partir del conjunto de puntos experimentales (x,y). Uno de los métodos comúnmente utilizados para resolver este problema es el método de mínimos cuadrados que describiremos a continuación.

Supongamos que tenemos un conjunto de puntos o parejas de mediciones,

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_i, y_i), \ldots (x_n, y_n)$$

Con objeto de simplificar los cálculos, supongamos que el error en "y" es mucho mayor que el error en "x" por lo que el error en esta última cantidad lo despreciaremos considerando el valor en x como exacto.

Ahora bien, dado un par de valores cualquiera, (x_i, y_i), la desviación o error del valor verdadero para yi esta dado por

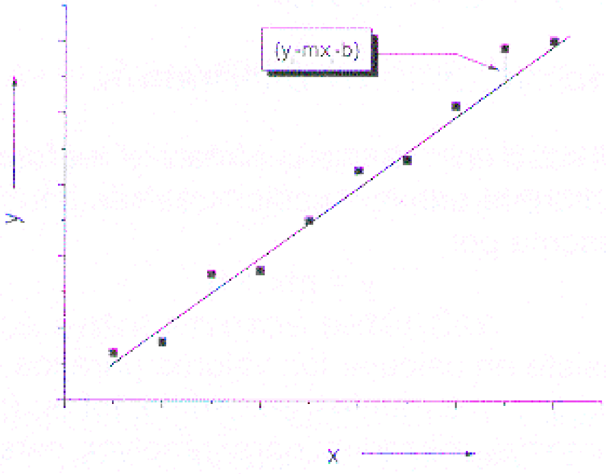
$$y_i - mx_i - b$$

Esta situación se ilustra en la gráfica 13

Los mejores valores para m y para b se toman como aquellos para los cuales la suma de los cuadrados de los errores es mínima, de aquí el nombre del método. Esto se puede expresar como la situación para la cual

$$S = \Sigma_i (y_i - mx_i - b)^2$$

resulta ser un mínimo.



Gráfica 13

Para minimizar s debemos de igualar sus derivadas parciales a cero,

$$\frac{\partial S}{\partial m} = -2\sum_i x_i(y_i - mx_i - b) = 0$$
$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2\sum_i (y_i - mx_i - b) = 0$$

Desarrollando estas dos ecuaciones se tiene,

$$m\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i$$
$$m\sum x_i + bn = \sum y_i$$

los valores para m y b se obtienen resolviendo estas dos ecuaciones simultaneas.

Si dividimos la última de las dos ecuaciones entre n se obtiene b en función de m,

$$b = y - mx$$

donde,

$$x = \frac{1}{n}\sum x_i$$

$$y = \frac{1}{n}\sum y_i$$

representan las coordenadas del centro de gravedad de todos los puntos experimentales. No es de sorprenderse entonces, que la mejor recta pase por el centro de gravedad.

Insertando el valor de b en la primera de las ecuaciones simultaneas y simplificando un poco, se tiene la solución para m,

$$m = \frac{\sum (x_i - x) y_i}{\sum (x_i - x)^2}$$

4.5.1.a Ejemplo de aplicación

Como ejemplo consideremos el experimento E2, "péndulo bifilar". Recordamos que en su primera parte se tiene que determinar el valor de m a partir de la expresión

$$\log T = \log K + m \log s + n \log \lambda$$

donde T es el periodo , s la separación entre hilos y los demás parámetros son constantes. La tabla 14 muestra los datos experimentales y su tratamiento

De este ajuste podemos determinar que el valor del exponente m resulta ser –1 (tabla 14) Entonces podemos escribir que T es proporcional a (1/s).

De manera análoga podemos analizar la segunda parte del experimento que consiste en dejar fija la separación s entre los hilos y variar su longitud λ para determinar el valor del coeficiente n. La tabla 15 muestra el análisis

Log T = y_i	log s = x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})y_i$	$(x_i - x)^2$	
0.0334	1.6021	0.1647	0.0055	0.0271	
0.1173	1.5185	0.0811	0.0095	0.0066	
0.1761	1.4624	0.025	0.0044	0.0006	
0.2430	1.3979	-0.0395	-0.0096	0.0016	
0.2945	1.3424	-0.0950	-0.0280	0.0090	
0.3365	1.3010	-0.1364	-0.0459	0.0186	
$y = \frac{1}{n}\sum y_i = 0.2001$	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i = 1.4374$		$\sum (x_i - \bar{x})y_i = -0.0641$	$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 0.0635$	$m = \frac{\sum (x_i - x)y_i}{\sum (x_i - x)^2} = \frac{-0.0641}{0.0635} = -1.009$

Tabla 14

Log T = y_i	log λ = x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})y_i$	$(x_i - x)^2$	
-0.1805	1.0828	-0.3649	0.0659	0.1332	
-0.0506	1.3054	-0.1423	0.0072	0.0202	
0.0334	1.4786	0.0309	0.0010	0.0010	
0.1106	1.6274	0.1797	0.0200	0.0323	
0.1761	1.7443	0.2966	0.0522	0.0880	
$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum y_i = 0.0178$	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i = 1.4477$		$\sum (x_i - \bar{x})y_i = 0.1463$	$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 0.2747$	$m = \frac{\sum (x_i - x)y_i}{\sum (x_i - x)^2} = \frac{0.1463}{0.2747} \cong 0.53$

Tabla 15

En resumen, utilizando el método de mínimos cuadrados obtenemos que el valor de $n \cong 0.53$ y m =-1. Como en la naturaleza no suelen aparecer coeficientes irracionales concluimos que el período T depende de λ y s de la siguiente manera

$$T = \text{cte.}\sqrt{\frac{\lambda}{s^2}}$$

Anexos

Anexo 1
Anexo 2

Anexo 1

Prefijos de unidades SI

Múltiplos

10^{12}	= tera	= T
10^{9}	= giga	= G
10^{6}	= mega	= M
10^{3}	= kilo	= k
10^{2}	= hecto	= h
10	= deca	= da

Submúltiplos

10^{-1}	= deci	= d
10^{-2}	= centi	= c
10^{-3}	= mili	= m
10^{-6}	= micro	= μ
10^{-9}	= nano	= n
10^{-12}	= pico	= p
10^{-15}	= femto	= f
10^{-18}	= atto	= a

ANEXO 2

Referencias y lecturas recomendadas

- Libros de texto.

Existe una gran diversidad de excelentes libros de texto en la lengua castellana de nivel elemental y medio que pueden ser consultados. A continuación citaremos a algunos alfabéticamente por el nombre de sus autores o por las iniciales como se les conoce ordinariamente. la lista no pretende ser completa.

Alonso-Finn
Bueche y Jerde
Halliday y Resnick
IPS
PSSC
Serway

Sin embargo hay un libro que se sale de lo común

" Física para las ciencias de la vida y de la salud". S.G.G. MacDonald y D.M. Burns. Fondo educativo interamericano, S.A. 1978.

Interesante libro que abarca muchas aplicaciones de la física en campos como la medicina y la biologia. Este libro puede inspirar a profesores a inventar sus propios problemas experímentales y a los alumnos a descubrir la utilidad de la física.

- Libros de texto de física experimental o experimentación

En contraste con los libros "teóricos" o los mixtos como el PSSC y el IPS existen pocos títulos de obras exclusivamente dedicadas a experimentos. A continuación citamos algunos textos sobresalientes.

"Experimentación. Una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos" D. C. Baírd - Prentice Hall Hispanoamericana. S. A. 2da. Edición 1991.

Es un libro completo a nivel medio que introduce al lector a diversos tópicos como son: el cálculo de mínimos cuadrados, técnicas de ajuste de curvas, resultados estadísticas y cálculo de la incertidumbre.

" Problemas experimentales ingeniosos' de la física" V. N. Langue. Editorial Mir Moscú. 1979.
Excelente colección de problemas experimentales cuyas solución requiere de ingenio. El libro fue traducido a varios idiomas. La desaparición de la edlitorial Mir hace difícil conseguir este libro.

Problemas didácticos de física" M. A. Ushakov. Editorial Mir Moscú. 1984.
Colección de experimentos de electricidad que requieren un mínimo equipo de laboratorio.
Al igual que el libro de Langue, resulta difícil conseguirlo.