22. Un bloque de 10 kg se suelta desde el punto A sobre un carril ABCD como se ve en la figura. El carril no presenta fricción en ninguna parte excepto en la parte BC, de longitud 6 m. El bloque viaja hacia abajo del carril hasta chocar con un resorte cuya constante de fuerza es $k = 2.250 N/m$ y lo comprime una distancia de 0,3 m desde su posición de equilibrio antes de llegar al reposo momentáneamente. Determine el coeficiente de fricción cinético entre la parte BC del carril y el bloque.

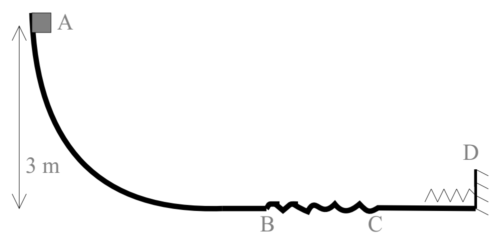

Figura 17: Problema 22.

Solución: Por conservaci ón de la energía mecánica tendremos que la energía potencial gravitatoria en el punto A, más el trabajo producido por la fuerza de rozamiento entre B y C será igual a la energía potencial elástica adquirida por el muelle en D: $V_A + W_R = V_D$, por lo tanto

$$mgh - \mu mgBC = \frac{1}{2}kx^2$$

con lo que:

$$\mu = \frac{1}{mgBC}(mgh - \frac{1}{2}kx^2) = 0,3278$$

23. Se empuja un bloque de masa $m = 0,5kg$ contra un resorte horizontal de masa despreciable, comprimiendo el resorte una distancia Δx (véase figura). La constante del resorte es 450 N/m. Cuando se suelta el bloque viaja a lo largo de una superficie horizontal y sin fricción hasta el punto B, en el que empieza a moverse hacia arriba por la parte interior de un carril circular vertical de radio $R = 1m$. La velocidad del bloque en la parte inferior del carril es $v_B = 12m/s$, y el bloque experimenta una fuerza de rozamiento mientras se desliza a lo largo del carril circular, que podemos considerar constante, y que es de 7N. Se pide: a) ¿Cuál fué la compresión inicial del resorte? b) ¿Cuál será la velocidad del bloque en el punto más alto del carril circular? c) ¿Alcanzará el bloque el punto más alto del carril o caerá antes de alcanzarlo?.

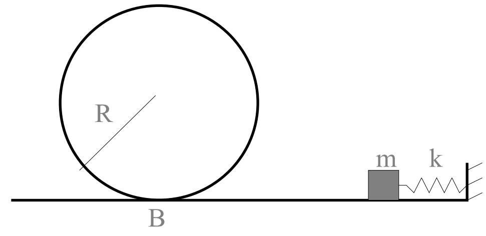

Figura 18: Problema 23.

Solución:

a) Por conservación de la energía mecánica, la energía potencial elástica inicial del muelle será igual a la energía cinética del bloque en B, por lo que:

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_B^2; \quad x = \sqrt{\frac{m}{k}}v_B = 0.4m$$

b) Por conservación de la energía mecánica, la energía cinética en B, más el trabajo de rozamiento será igual a la suma de las energías cinética y potencial del bloque en el punto más alto del carril que llamaremos C; por lo tanto:

$$E_B^{cin} + W_R = E_C^{cin} + E_C^{pot}$$

Como nos dicen que la fuerza de rozamiento es constante, W_R será igual al producto del valor de la fuerza de rozamiento F_R por la distancia recorrida sobre el carril circular (πR), con signo negativo, ya que la fuerza y el desplazamiento tienen sentidos contrarios. Por lo tanto,

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \pi R F_R = \frac{1}{2}mv_C^2 + mg2R$$

por lo tanto,

$$v_C = \sqrt{v_B^2 - \frac{2\pi R F_R}{m} - 4gR} = 4m/s$$

c) El bloque alcanzará el punto C si la fuerza centrífuga en C es mayor o igual que el peso del bloque.

$$m\frac{v^2}{R} = mg; \quad v = \sqrt{gR} = 3,1m/s$$

Por lo tanto como la velocidad en C es mayor que 3,1 m/s, el bloque **sí** alcanzará el punto C.

24. En el sistema de la figura, una bala de masa m y velocidad v atraviesa la lenteja de un péndulo de masa M y sale con velocidad $v/2$. La longitud de la cuerda del péndulo es l. Se pide:

a) Calcular el valor mínimo que deberá tener v para que el péndulo pueda dar una vuelta completa.

b) Suponiendo que la velocidad de la bala es la obtenida en el apartado anterior, calcular la tensión de la cuerda en los puntos más bajo, intermedio y más alto de la trayectoria de la lenteja del péndulo.

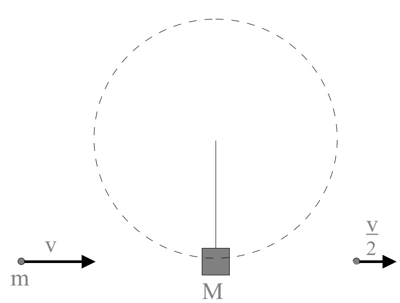

Figura 19: Problema 24.

Solución:

a) En primer lugar calcularemos la velocidad con que se mueve la lenteja después del impacto. Por conservación de la cantidad de movimiento, tenemos que

$$mv = MV + m\frac{v}{2}$$

con lo que $V = \frac{m}{2M}v$. Por otro lado, sabemos que la energía total se tiene que conservar, luego, si tomamos como origen de energía potencial la posición más baja de la lenteja, podemos escribir:

$$\frac{1}{2}MV^2 = Mg2l + \frac{1}{2}M(V')^2$$

Además, la condición para que pueda dar una vuelta es que en el punto más alto la fuerza centrífuga compense exactamente la fuerza gravitatoria, por lo tanto:

$$M\frac{(V')^2}{l} = Mg; \quad \textit{o lo que es lo mismo} \quad (V')^2 = gl$$

Sustituyendo las expresiones de V y V' en la ecuación de la conservación de la energía y despejando v se obtiene:

$$v = 2\sqrt{5lg}\ \frac{M}{m}$$

b) En el punto más bajo la tensión de la cuerda tiene que compensar la fuerza gravitatoria sobre la lenteja más la fuerza centrífuga, que en ese punto tiene también dirección radial. Entonces,

$$T = Mg + M\frac{V^2}{l}$$

Cuando $v = 2\sqrt{5lg}\frac{M}{m}$, el valor de V es $V = \sqrt{5lg}$, y por lo tanto, $T = 6Mg$.

Cuando la lenteja se halla en la posición intermedia la tensión tiene que compensar únicamente la fuerza centrífuga, ya que el peso es perpendicular a la tensión, y por lo tanto $T = m\frac{(V'')^2}{l}$. Para calcular V'' utilizamos otra vez conservaci ón de la energía:

$$\frac{1}{2}MV^2 = Mgl + \frac{1}{2}M(V'')^2$$

de donde $(V'')^2 = 3lg$, y, por lo tanto, $T = 4Mg$.

Para el punto más alto se cumple que la fuerza centrífuga es igual al peso, y por lo tanto la tensión de la cuerda es nula.

25. Un bloque de masa m está colocado sobre una cuña de masa M que, a su vez, se apoya sobre una mesa horizontal como se muestra en la figura. Todas las superficies son lisas y sin fricción. Si el sistema parte del reposo estando el punto de partida del bloque a una altura h por encima de la mesa, hallar la velocidad de la cuña en el instante en que el punto P llega a la mesa.

Solución:

Para resolver el problema basta darse cuenta que la única fuerza exterior que actúa es la gravedad, que tiene dirección vertical, con lo que se conserva la cantidad de movimiento en la dirección horizontal, y que deriva de un potencial, con lo que se cumple el principio de conservación de la energía. Por tanto, podemos escribir la ecuacione que representa la conservación de la energía,

$$2mgh = MV^2 + mv_h^2 + mv_v^2,$$

donde V es la velocidad final de la cuña, y v_h y v_v son las componentes horizontal y vertical, respectivamente de la velocidad del bloque en el momento en que el punto P llega al suelo. También podemos escribir la ecuación de conservación de la componente horizontal de la cantidad de movimiento, que es

$$mv_h + MV = 0$$

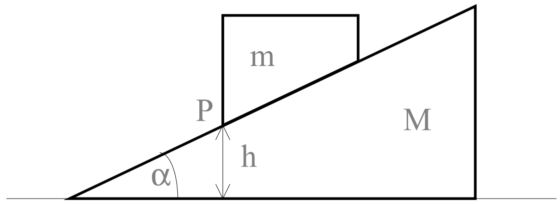

Figura 20: Problema 25.

Tenemos, entonces, dos ecuaciones y tres incógnitas V, v_h y v_v; para resolver el sistema nos hace falta una ecuación más que la obtenemos de imponer que en el sistema de referencia de la cuña, la velocidad del bloque $(v_h - V, v_v)$ es siempre tangente al plano inclinado, es decir

$$\frac{v_v}{v_h - V} = tg\alpha$$

Despejando v_h en la segunda ecuación y sustituyéndola en la tercera tenemos

$$v_h = -\frac{M}{m}V; \quad \text{y} \quad v_v = -(\frac{M+m}{m})V tg\alpha$$

Sustituyendo estas dos expresiones en la primera ecuación nos queda una ecuación con V como única incógnita de donde podemos despejar V de forma que

$$V^2 = \frac{2m^2gh}{(M+m)\left[M + (M+m)tg^2\alpha\right]} = \frac{2m^2gh}{(M+m)\left[M(1+tg^2\alpha) + mtg^2\alpha\right]}$$

Multiplicando numerador y denominador por $cos^2\alpha$ y extrayendo la raíz cuadrada obtenemos la expresión final

$$V = \sqrt{\frac{2m^2ghcos^2\alpha}{(M+m)\left[M + msen^2\alpha\right]}}$$

26. **Un bloque de 5 kg se mantiene contra un muelle, cuya constante de fuerza es 20 N/cm, comprimiéndolo 3 cm. El bloque se libera y el muelle se extiende impulsando el bloque a lo largo de una superficie horizontal rugosa. El coeficiente de rozamiento entre la superficie y el bloque es 0,2. Se pide determinar: a) el trabajo realizado sobre el bloque por el muelle al extenderse desde su posición comprimida a su posición de equilibrio, b) el trabajo realizado por fricción sobre el bloque mientras se desplaza los 3 cm hasta la posición de equilibrio del muelle, c) la velocidad del bloque al alcanzar el muelle su posición de equilibrio, d) la distancia que recorrería el bloque sobre la superficie rugosa si no estuviera sujeto al muelle.**

Solución:

a) El trabajo que puede realizar el muelle al extenderse hasta su posición de equilibrio se puede calcular de dos maneras: haciendo el cálculo a partir de la definición de trabajo, o dándose cuenta que dicho trabajo tiene que ser igual a la energía potencial almacenada en el muelle. Es decir:

$$W_m = \int_{x_0}^{x_t} F(\vec{x})d\vec{x} = -\int_{-3}^{0} Kxdx = \left[\frac{1}{2}Kx^2\right]_{-3}^{0} = 0,9\text{Julios}$$

b) Para calcular el trabajo realizado por fricción basta aplicar la definición de trabajo y darse cuenta que en este caso la fuerza de rozamiento no depende de la posición, por lo que tendremos:

$$W_r = -F_r\Delta x = -\mu mg\Delta x = -0,3\text{Julios}$$

c) Basta aplicar el teorema de las fuerzas vivas, que en este caso equivale a decir que la energía potencial del muelle se tiene que invertir en vencer el trabajo de rozamiento y en proporcionar energía cinética al bloque, es decir:

$$W_m = Ec_b - W_r$$

de donde,

$$Ec_b = W_m + W_r \quad \text{esdecir,} \;\; Ec_b = 0,6 \text{Julios} \;\; v = \sqrt{\frac{2Ec_b}{m}} = 50cm\ s^{-1}$$

d) En este caso toda la energía cinética se tiene que consumir por rozamiento, por lo tanto

$$\frac{1}{2}mv^2 = F_r x; \;\; \text{dedonde} \;\; x = \frac{v^2}{2\mu g} = 6cm$$

IV. Dinámica del Sólido Rígido

27. Una esfera de masa m y radio R sube rodando por un plano inclinado 30^o. Cuando está al pié del mismo el centro de masas de la esfera tiene una velocidad de $4,9m/s$. a) ¿Hasta dónde sube la esfera en el plano?. b) ¿Cuánto tiempo tarda en regresar al pie del plano?

Solución:

a) En el sistema se conserva la Energía total. Por lo tanto, tomando como origen de energía potencial el plano inferior, tenemos:

$$mgh = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$mgh = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\frac{V^2}{R^2}$$

Por lo tanto, $h = \frac{7V^2}{10g} = 1,715m$.

b) El movimiento de subida es uniformemente acelerado y sabemos su velocidad inicial y final, luego podemos escribir:

$$V_f = 0 = V_o - at \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{V_o}{t}$$

$$S = \frac{h}{sen\alpha} = V_o t - \frac{1}{2}at^2$$

Despejando t y sustituyendo los valores de V_o y α se obtiene $t = 2,8s$.

28. El momento cinético de un volante que tiene un momento de inercia de $0,125Kgm^2$, disminuye desde 3 hasta $2kgm^2/s$ en un periodo de 1,5 s. a) ¿Cuál es el torque promedio que actúa sobre el volante durante este tiempo? b) Suponiendo una aceleración angular uniforme, ¿cuántas revoluciones habrá girado el volante? c) ¿Cuánto trabajo se habrá efectuado?

Solución:

a) Como el torque es igual a la variación del momento angular (o cinético),

$$M = \frac{L_1 - L_2}{t} = \frac{2}{3}Kgm^2s^{-2}$$

b) Cómo el torque es constante, la aceleración angular es constante, luego el movimiento es circular uniformemente acelerado. Por tanto, si conocemos la aceleración angular y la velocidad angular inicial, podríamos calcular el ángulo girado por el volante.

La aceleración angular se calcula a partir de $M = I\alpha$, donde M es el torque total o momento total de las fuerzas exteriores. Directamente se obtiene $\alpha = M/I = \frac{16}{3}s^{-2}$.

Por otra parte, $L_0 = I\omega_0$, donde L_0 y ω_0 son el momento angular y la velocidad angular iniciales. Por lo tanto, $\omega_0 = \frac{L_0}{I} = 24s^{-1}$.

Por lo tanto, usando las fórmulas de la cinemática, obtenemos:

$\theta = \omega_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2 = 30radianes$, por lo tanto el número de revoluciones será $\frac{30}{2\pi}$.

c) El trabajo efectuado será igual a la variación de la energía cinética del sistema.

$$W = E_{c1} - E_{c2} = \frac{1}{2}I\omega_0^2 - \frac{1}{2}I\omega_f^2$$

Necesitamossaber el valor de la velocidad angular final ω_f, que se puede calcular de la misma manera que hemos calculado la inicial anteriormente (¿puede pensar otra forma de calcular ω_f?), con lo que $\omega_f = \frac{L_f}{I} = 16 s^{-1}$

Por lo tanto, $W = 20 Julios$.

29. Una partícula de masa m, fijada al extremo de una cuerda, se mueve sin rozamiento en un círculo de radio r sobre una mesa horizontal. Hacemos pasar el otro extremo de la cuerda por un agujero en la mesa hecho en el centro del círculo anterior. a) Si tiramos de la cuerda de forma que se reduzca el radio de la órbita circular, ¿cómo cambia la velocidad angular si es ω_0 cuando $r = r_0$? b) ¿Cuál es el trabajo efectuado para reducir lentamente el radio de r_0 a $r_0/2$?

Solución:

a) Aquí no aplicamos ningún par externo, conservándose el momento angular (*¿Podría decir por qué?*). En éste caso $L = mr^2\omega$ al ser el movimiento circular.

Si reducimos el radio de r_0 a r y la velocidad angular cambia de ω_0 a ω tendremos, por conservación del momento angular, $mr^2\omega = mr_0^2\omega_0$. En consecuencia:

$$\omega = [\frac{r_0}{r}]^2 \omega_0. \tag{1}$$

b) El trabajo realizado en acortar la cuerda es igual a la integral de la tensión en la cuerda sobre toda la variación de longitud.

$$W = \int_{r_0}^{r_0/2} \vec{T}\vec{r}.$$

La tensión en la cuerda es simplemente la fuerza centrípeta

$$\vec{T} = mv^2/r = mr\omega^2$$

(dirigida hacia el centro). Integrando y utilizando la ecuación (1) obtenemos como resultado

$$W = \frac{3}{2} m r_0^2 \omega_0^2.$$

El signo positivo indica que el trabajo se realiza sobre la partícula, tal como era de esperar.

30. Una bola de billar es golpeada por el taco en dirección horizontal y a la altura del centro de la bola. Siendo R el radio de la bola, M su masa, V_0 la velocidad inicial y μ el coeficiente de rozamiento entre la bola y la mesa, ¿qué distancia habrá recorrido la bola antes de que deje de resbalar sobre la mesa?

Solución: El movimiento de traslación de la bola viene regido por la ecuación del movimiento del centro de masa (suma de todas las fuerzas igual a la masa del sistema por la aceleración del centro de masa), mientras que el movimiento de rotación viene regido por la ecuación fundamental de la dinámica de rotación (momento o torque total de las fuerzas exteriores respecto de un eje igual al momento de inercia respecto a ese eje por la aceleración angular).

En este caso la única fuerza exterior es el rozamiento, luego las leyes anteriores se escriben en este caso:

$$Ma = -Mg\mu$$

$$I\alpha = Mg\mu R$$

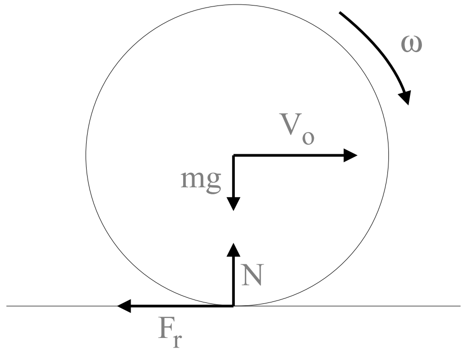

Figura 21: Problema 30.

Por lo tanto la velocidad de traslación (o deslizamiento) sigue una ley:

$$V = V_0 - g\mu t$$

mientras que la velocidad de rotación sigue la ley:

$$\omega = \frac{Mg\mu R}{I}$$

En el momento en que la bola empieza a rodar sin deslizar, se cumple que $V = R\omega$. Sustituyendo los valores en función del tiempo de V y ω, se puede obtener el tiempo para el cuál se produce la rodadura pura, que resulta ser $t = \frac{2V_0}{7g\mu}$.

Una vez obtenido este tiempo, se puede obtener la distancia pedida sin más que utilizar las fórmulas del movimiento acelerado:

$$S = V_0 t - \frac{1}{2}at^2 = \frac{12}{49}\frac{V_0^2}{g\mu}$$

31. Dos discos de radios r y R, y momentos de inercia I_1 e I_2, respectivamente, pueden girar en un mismo plano, respecto de ejes perpendiculares al plano y que pasan por sus centros respectivos. El disco mayor gira con velocidad inicial ω_0. Si acercamos el disco pequeño hasta que entren en contacto sus circunferencias exteriores, éste inicia una rotación por rozamiento. Finalmente se establece una rodadura sin deslizamiento y los dos discos se mueven en sentidos contrarios con velocidades angulares constantes. a) Determinar la velocidad angular final del disco pequeño. b) Se conserva el momento angular total?

Solución:

a) La variación del momento angular de cada uno de los discos es igual al torque (o momento) ejercido por la fuerza de la fuerza de rozamiento sobre cada uno de los discos. Suponiendo que dicha variación ocurre en un tiempo t podemos escribir:

$$FRt = I_2\omega_0 - I_2\omega_2$$

$$Frt = I_1\omega_1$$

Dividiendo miembro a miembro las dos igualdades anteriores se obtiene:

$$I_2\omega_0 - I_2\omega_2 = \frac{RI_1\omega_1}{r}$$

Cuando se establece la rodadura sin deslizamiento, se cumple $R\omega_2 = r\omega_1$, por lo que podemos eliminar ω_2 de la expresión anterior y obtener:

$$\omega_1 = \frac{I_2 r R}{I_1 R^2 + I_2 r^2}\omega_0$$

b) El momento angular inicial es $L_i = I_2\omega_0$. Mientras que el momento angular final es:

$$L_f = I_2\omega_2 + I_1\omega_1 = I_2\omega_0(\frac{I_1 Rr + I_2 r^2}{I_1 R^2 + I_2 r^2})$$

por lo que al ser R distinto de r, el momento angular total no se conserva.

32. Una bola de billar inicialmente en reposo recibe un golpe de un taco en dirección horizontal y a una altura h por encima del centro de la bola. El golpe le comunica una velocidad inicial V_0, y debido al rozamiento con la mesa, termina rodando sin deslizar con una velocidad igual a $9/7 V_0$; ¿Cuál es la distancia h a la que el taco ha golpeado la bola?.

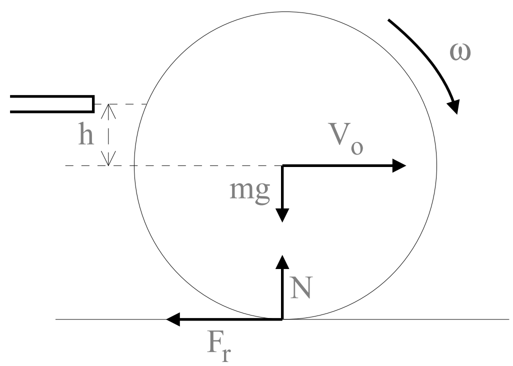

Figura 22: Problema 32.

Solución: Si el taco ejerce una fuerza F durante un tiempo t, le comunica a la bola una cantidad de movimiento $Ft = mV_0$, y un momento angular $Fht = I\omega_0$. Dividiendo miembro a miembro se obtiene $\omega_0 = \frac{mhV_0}{I}$.

Por otro lado, dado que al final rueda sin deslizar, la velocidad angular final será $\omega_f = \frac{9}{7}\frac{V_0}{R}$. Si conseguimos relacionar ω_0 y ω_f habremos resuelto el problema. Para ello procederemos como en el anterior problema de la bola de billar.

El cambio del movimiento de tener rodadura y deslizamiento a tener solamente rodadura es debido al rozamiento. Por lo tanto escribimos otra vez las ecuaciones de la dinámica de traslación y rotación:

$$Ma = Mg\mu$$

$$I\alpha = Mg\mu R$$

Por lo tanto, $\alpha = \frac{mR}{I}a$. Por otra parte, la velocidad de traslación sigue la ley $V = V_0 + at$, y como sabemos el valor final de la velocidad podemos deducir que $at = \frac{-2}{7}V_0$, por lo que $\alpha t = \frac{-2}{7}\frac{mR}{I}V_0$.

Por lo tanto, para la velocidad angular tenemos:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = \omega_0 - \frac{2}{7}\frac{mR}{I}V_0$$

Sustituyendo el valor de ω_f, el momento de inercia de la esfera $I = \frac{2}{5}MR^2$ y simplificando se llega a:

$$h = \frac{4}{5}R$$

33. Una cuerda está enrollada sobre un disco uniforme de radio $R = 5cm$, y masa $m = 100g$. El disco se libera desde el reposo con la cuerda vertical sujeta por el extremo superior en el soporte fijo de la figura 2. A medida que desciende el disco, hallar: a) la tensión de la cuerda; b) la aceleración del centro de masa del disco; c) la velocidad de dicho centro de masa.

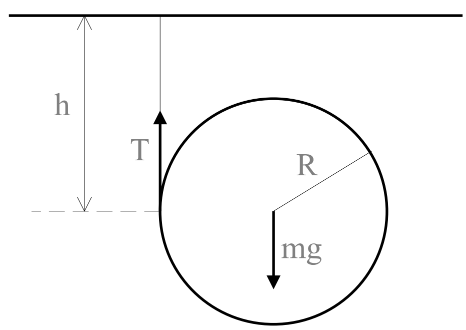

Figura 23: Problema 33.

Solución: Las ecuaciones para la dinámica del disco, tomando momentos en el eje del disco, son:

$$ma = T - mg; \quad I\alpha = -TR$$

Como $a = \alpha R$, tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, a y T. Resolviéndolo, y utilizando $I = \frac{1}{2}mR^2$, obtenemos:

a) $T = \frac{1}{3}mg$

b) $a = -\frac{2}{3}g$

c) Hay varias formas de resolver este apartado. Expondremos dos de ellas.

- Como el movimiento es uniformemente acelerado $v = \sqrt{2ah} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$.
- Por conservación de la energía:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

  Donde sustituyendo $I = \frac{1}{2}mR^2$, y $\omega = v/R$, volvemos a obtener $v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$.

34. Un disco macizo de radio R situado en un plano vertical gira con velocidad angular ω_o respecto de un eje horizontal que pasa por su centro. Seguidamente el disco se pone en contacto con un suelo horizontal rugoso (con coeficiente de rozamiento μ) y se suelta. Se pide: a) El tiempo que tarda el disco en alcanzar el movimiento de rodadura pura, b) la distancia recorrida por el disco hasta llegar a ese movimiento de rodadura pura.

Solución:

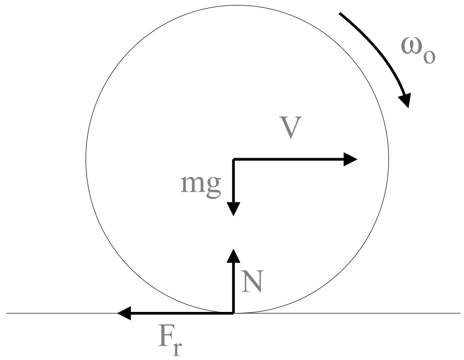

Figura 24: Problema 34.

a) Al plantear las ecuaciones de la dinámica del disco hay que considerar que las únicas fuerzas que se ejercen sobre el disco al estar en contacto con el suelo son su peso, la reacción normal del suelo y la fuerza de rozamiento. Sin embargo, el peso y la reacción normal del suelo son iguales y de sentido contrari, y además al calcular momentos respecto al centro del disco no dan ninguna contribución al momento total. Por lo tanto las ecuaciones para la traslación y rotación del disco son, respectivamente:

$$ma_x = F_R = -\mu mg$$

$$I\alpha = -F_R R = -\mu mgR$$

Sabiendo que $I = \frac{1}{2}mR^2$, podemos obtener los valores de la aceleración del centro de masa del disco y la aceleración angular del disco, que resultan ser $a_x = -\mu g$, y $\alpha = \frac{-2\mu g}{R}$. La condición de rodadura pua se cumple cuando $V = \omega R$, por lo tanto basta hacer uso de las ecuaciones de la cinemática e imponer la condición de rodadura pura. De esta forma obtenemos:

$$V = -\mu gt$$

$$\omega = \omega_o - \frac{2\mu g}{R}t$$

y haciendo $V = \omega R$ tenemos $t = \frac{\omega_o R}{\mu g}$.

b) La distancia recorrida se obtiene también de las ecuaciones de la cinemática: $x = -\frac{\mu g}{2}t^2 = -\frac{\omega_o^2 r^2}{2\mu g}$.

35. Un disco plano uniforme de masa M y radio R, y situado en un plano vertical, gira entorno a un eje horizontal perpendicular al disco y que pasa por su centro de masas con velocidad angular ω_0. a) ¿Cuál es su energía cinética? ¿Cuánto vale su momento cinético? b) Del borde del disco se desprende un pequeño trozo de masa m, en un instante tal que el trozo se eleva verticalmente desde el punto en que se rompió ¿Cuánto se eleva el trozo antes de caer? c) ¿Cuánto vale la velocidad angular del disco sin el trozo? ¿Cuáles son el momento angular y la energía cinética finales del disco?

Solución:

a)

$$E_c = \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{4}MR^2\omega_0^2$$

$$L_i = I\omega_0 = \frac{1}{2}MR^2\omega_0$$

b) Un trozo que se desprende del borde del disco tiene $V_0 = R\omega_0$. El punto más alto de su trayectoria será aquél en que su velocidad se anule, luego $R\omega_0 - gt = 0$, se verifica para $t = \frac{R\omega_0}{g}$, luego el espacio recorrido será:

$$s = V_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{R^2\omega_0^2}{2g}$$

c) Cómo no hay fuerzas exteriores el momento angular se conserva, luego el momento angular final será el mismo que al principio. Eso nos permite, además, calcular la velocidad angular final:

$$\frac{1}{2}MR^2\omega_0 = \frac{1}{2}(M-m)R^2\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{M}{M-m}\omega_0$$

La energía cinética final es, pués:

$$E_{cf} = \frac{1}{2}I_1\omega_f^2 = \frac{1}{2}\frac{M^2}{M-m}R^2\omega_0^2$$

36. En el sistema de la figura, la masa m desciende por efecto de la gravedad tirando de la cuerda que está enrollada en torno al disco de radio r, que a su vez está unido rígidamente al disco de masa M y radio R. Suponiendo que el momento de inercia del disco de radio r es despreciable comparado con el de radio R, se pide: a) Calcular la aceleración de m. b) Calcular la tensión de la cuerda. Datos numéricos: r = 0,04 m; R = 0,12 m; M = 4 Kg; m = 2 Kg.

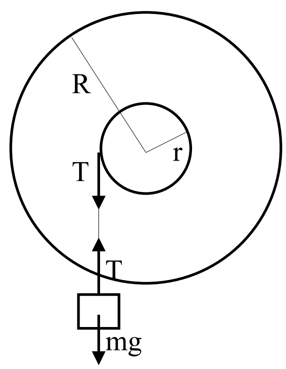

Figura 25: Problema 36.

Solución:

a) Para resolver el problema basta aplicar las ecuaciones fundamentales de la dinámica primero al movimiento del bloque que desciende y después a la rotación del disco:

$$T - mg = ma$$

$$rT = I\alpha$$

teniendo, ademas, en cuenta que $a = -\alpha r$, y que $I = \frac{1}{2}MR^2$, donde a es la aceleración lineal del centro de masas del bloque, y *alpha* es la aceleración angular del disco. Despejando T en la primera ecuación y sustituyendo las expresiones de T, a e I en la segunda ecuación obtenemos

$$a = -\frac{2mr^2}{MR^2 + 2mr^2}\, g$$

que sustituyendo los valores numéricos nos da $a = -g/10$.

b) De la primera ecuación del apartado a) tenemos $T = m(a + g)$, con lo que sustituyendo directamente el valor de a, tenemos

$$T = mg(\frac{MR^2}{MR^2 + 2mr^2})$$

que sustituyendo nos da $T = 18 Newtons$.

37. **En una bolera se lanza una bola de masa M y radio R de modo que en el instante que toque el suelo se esté moviendo horizontalmente con una velocidad v_o deslizando sin rodar. La bola se desliza durante un tiempo t_1 a lo largo de una distancia s_1 antes de empezar a rodar sin deslizar. Si el coeficiente de rozamiento al deslizamiento entre la bola y el suelo es μ_c, a) calcular s_1, t_1 y la velocidad v_1 de la bola en el momento que rueda sin deslizar, b) calcular los valores de s_1, t_1 y v_1 para $v_o = 8m/s$, y $\mu_c = 0,4$.**

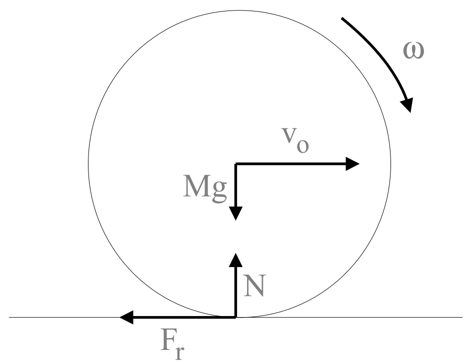

Figura 26: Problema 37.

Solución:

a) Mientras la bola se desplaza sobre el suelo, la única fuerza que actúa sobre ella es la fuerza de rozamiento, por lo tanto las ecuaciones para la traslación del centro de masas y la rotación en torno a él son:

$$Ma = -\mu_c Mg \quad I\alpha = \mu_c MgR$$

De estas ecuaciones, sustituyendo $I = \frac{2}{5}MR^2$, se obtienen los valores de las aceleraciones lineal y angular que resultan ser constantes, $a = -\mu_c g$; $\alpha = \frac{5\mu_c g}{2R}$. Por lo tanto el movimiento resultante es la composición de un movimiento de traslación uniformemente retardado con aceleración a y velocidad inicial v_0, y un movmiento de rotación uniformemente acelerado de velocidad angular inicial nula y aceleración angular α. Entonces, las expresiones de la cinemática nos dan a cualquier tiempo t los valores de la velocidad del centro de la bola y la velocidad angular de la misma, que serán, pués:

$$v_c = v_0 - \mu_c gt; \quad \omega = \alpha t = \frac{5\mu_c g}{2R}t$$

Para resolver el problema basta comprobar que valores deben tener v_c, ω y t cuando se cumpla la condición de rodadura sin deslizamiento, esto es, cuando $v_c = \omega R$. Las experesiones para v_c, ω y la condición de rodadura sin deslizamiento forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que se resuelve dando como resultado:

$$t_1 = \frac{2v_0}{7\mu_c g}; \quad v_1 = \frac{5}{7}v_0; \quad s_1 = \frac{12v_0^2}{49\mu_c g}$$

b) Sustituyendo los valores numéricos dados en el enunciado se obtiene:

$$t_1 = \frac{4}{7} = 0,57s; \quad v_1 = \frac{40}{7} = 5,7ms^{-1}; \quad s_1 = 3,92m$$

38. **Una bola de billar de radio R inicialmente en reposo recibe un golpe instantáneo mediante un taco. El impulso es horizontal y se aplica a una distancia $2R/3$ por debajo del centro de la bola. La velocidad inicial de la bola es v_o. Se pide calcular: a) la velocidad angular inicial ω_o, b) la velocidad de la bola cuando empieza a rodar sin deslizar, c) la energía cinética inicial de la bola, d) el trabajo de fricción realizado por la bola cuando desliza por la mesa.**

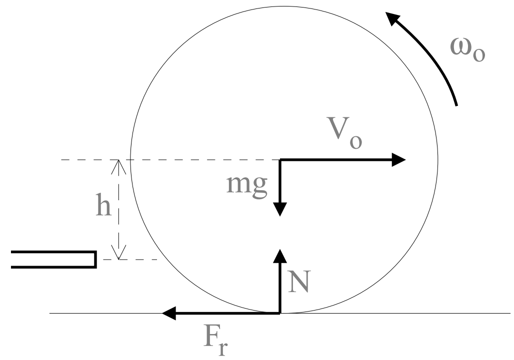

Figura 27: Problema 38.

Solución:

a) El taco actúa durante un tiempo Δt con una fuerza F y comunica a la bola un impulso $F\Delta t = Mv_0$. Además durante el tiempo que actúa le comunica un momento angular

$$F\frac{2}{3}R\Delta t = I\omega_0$$

Sustituyendo en esta última ecuación $F\Delta t$ por Mv_0 se obtiene $\omega_0 = \frac{5v_0}{3R}$.

b) El movimiento posterior viene gobernado por la fuerza de rozamiento F_r. Escribiendo las ecuaciones para el movimiento de traslación del centro de masas y para el movimiento de rotación en torno al centro de masas, tenemos:

$$Ma = -F_r \;\; I\alpha = F_rR$$

De estas ecuaciones, sustituyendo $I = \frac{2}{5}MR^2$, se obtienen los valores de las aceleraciones lineal y angular que resultan ser constantes, $a = -F_r/M$; $\alpha = \frac{5F_r}{2MR}$. Por lo tanto el movimiento resultante es la composición de un movimiento de traslación uniformemente retardado con aceleración a y velocidad inicial v_0, y un movimiento de rotación uniformemente acelerado de velocidad angular inicial $-\omega_0$ y aceleración angular α. Entonces, las expresiones de la cinemática nos dan a cualquier tiempo t los valores de la velocidad del centro de la bola y la velocidad angular de la misma, que serán, pués:

$$v = v_0 - \frac{F_r}{M}t; \quad \omega = -\omega_0 + \frac{5F_r}{2MR}t$$

Para poder resolver el sistema necesitamos una ecuación más que nos la da la condición de rodadura sin deslizamiento, esto es $v = \omega R$. Eliminando F_r de las dos ecuaciones anteriores y utilizando la condición de rodadura obtenemos $v = \frac{5}{21}v_0$.

c) $E_{ci} = \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{19}{18}Mv_0^2$.

d)$W_r = E_{ci} - E_{cf} = \frac{1}{2}Mv_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2 - E_{cf} = \frac{64}{63}Mv_0^2$.

39. **En el sistema de la figura dos ruedas iguales, con masas de 10 kg y diámetros de 50 cm, están rígidamente unidas a un eje de diámetro 20 cm y masa 20 kg. Se tira de una cuerda enrollada al eje con una fuerza de 22 N en dirección horizontal. Hallar la aceleración lineal del centro de masas del sistema cuando rueda sin deslizar.**

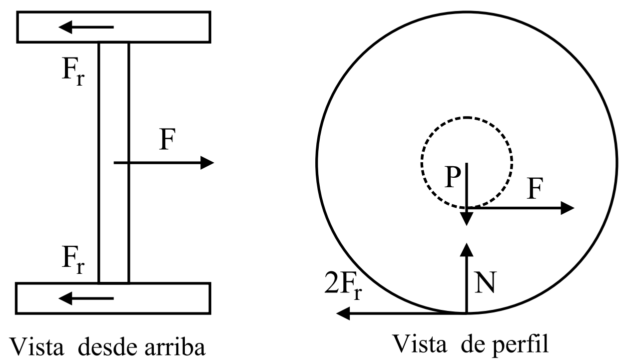

Figura 28: Problema 39.

Solución:

Para resolver el problema en forma simbólica, llamaremos m_r a la masa de cada rueda, m_e a la masa del eje, $M = 2m_r + m_e$ será la masa total del sistema, R el radio de cada rueda, r el radio del eje, y F la fuerza con la que se tira de la cuerda. Las fuerzas en la dirección horizontal que actúan sobre el sistema son la fuerza F y la fuerza de rozamiento en el punto de contacto de las ruedas con el suelo (que apunta en dirección contraria a F). Si calculamos el momento de las fuerzas actuantes con respecto al punto de contacto con el suelo, que llamaremos o, conseguimos que la fuerza de rozamiento no contribuya y simplificamos la resolución del problema. De esta forma, considerando de manera arbitraria como positivo el movimiento en el sentido de las agujas del reloj (para la rotación), y hacia la derecha (para el movimiento de desplazamiento del centro de masas), y considerando en principio que el sistema se mueve hacia la derecha (si no fuera así, el signo del resultado nos lo diría al final), tenemos (nótese que con el convenio anterior el sentido del vector momento es el mismo que el del vector aceleración angular)

$$\tau_o = F\,(R - r) = I_o\,\alpha$$

donde I_o es el momento de inercia del sistema con respecto a un eje que pasa por el punto de contacto respecto al que hemos calculado el momento, y α es la aceleración angular. Para calcular el momento de inercia hay que sumar las contribuciones de cada rueda y del eje, y usar el teorema de Steiner, o de los ejes paralelos, para trasladar el eje respecto al que calculamos el momento de inercia, del centro de masas al punto de contacto con el suelo. Explícitamente, tenemos

$$I_o = 2\,\left(\frac{1}{2}m_r R^2 + m_r R^2\right) + \frac{1}{2}m_e r^2 + m_e R^2$$

donde el primer término completo es la contribución de las dos ruedas, y los dos últimos es la correspondiente al eje de unión. Por lo tanto

$$I_o = m_r R^2 + \frac{1}{2}m_e r^2 + MR^2 = 3,23 \ \text{kg m}^2$$

Como, por otra parte, nos dicen que el sistema rueda sin deslizar, la condición de rodadura, que relaciona la aceleración del centro de masas con la aceleración angular, nos dice que

$$a = \alpha R$$

por lo que, de la ecuación del momento, deducimos finalmente

$$a = \frac{F\,R(R-r)}{I_o} = 0,26 \ \ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

que nos dice que, efectivamente, el sistema se mueve hacia la derecha, en el sentido de la fuerza con la que se tira de la cuerda.

40. **En el sistema de la figura, un cilindro de masa m y radio r rueda sin deslizar desde A hasta B sobre un bloque de madera con un perfil circular. El bloque de madera tiene una masa M y el radio de su cuadrante de superficie cilíndrica es R. El bloque de madera se apoya sin rozamiento sobre una superficie horizontal plana. Suponiendo que cuando el cilindro está en A, tanto m como M están en reposo, hallar la velocidad del bloque y la velocidad del centro de masas del cilindro cuando este llegue al punto B.**

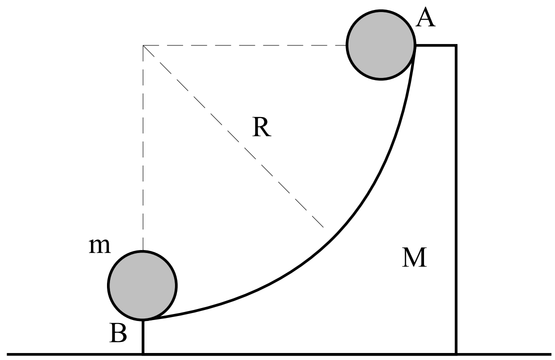

Figura 29: Problema 40.

Solución:

En primer lugar, la única fuerza externa que actúa sobre el sistema es la gravedad, luego, tomando como origen de energías potenciales la posición B, la energía potencial del cilindro en la posición A deberá haberse transformado en la posición B en energía cinética del bloque, más energía cinética del cilindro, la cuál tendrá dos contribuciones, de traslación del centro de masas y de rotación en torno al centro de masas. De esta manera tenemos:

$$mgR \ = \ \frac{1}{2}Mv_b^2 \ + \ \frac{1}{2}mv_c^2 \ + \ \frac{1}{2}I\omega_c^2$$

donde v_b es la velocidd del bloque, v_c es la velocidad del centro de masas del cilindro, $I = \frac{1}{2}mr^2$ es el momento de inercia del cilindro y ω_c es la velocidad angular de rotación del cilindro en torno a su eje de rotación. En la ecuación anterior tenemos tres incógnitas v_b, v_c y ω_c, por lo tanto debemos encontrar dos ecuaciones más para resolver el problema. Una de ellas nos la da el hecho de que la fuerza exterior (la gravedad) sólo actúa en la dirección vertical, luego la componente horizontal de la cantidad de movimiento se conservará. Por lo tanto

$$Mv_b \ = \ mv_c; \quad v_c = \frac{M}{m}\, v_b$$

La tercera ecuación la obtenemos de la condición de rodadura sin deslizamiento. Dicha condición establece que el desplazamiento del punto de contacto debe ser el mismo en la superficie del cilindro y en la superficie del bloque. Por lo tanto, llamemos θ_c al ángulo girado por el cilindro sobre su eje y θ_b al ángulo descrito en el mismo desplazamiento por la recta que une el centro del cilindro con el centro del perfil circular del bloque. La condición de que los desplazamientos anteriores sean iguales implica que

$$\theta_c r \ = \theta_b R$$

Para obtener una condición que relacione las velocidades basta con derivar respecto al tiempo ambos miembros de la ecuación anterior, con lo que tenemos

$$\omega_c r \;=\; \omega_b R$$

Finalmente, para eliminar ω_b basta darse cuenta que el movimiento del centro del cilindro implica que $v_c \;=\; \omega_b(R-r)$, de donde

$$\omega_c \;=\; \frac{R}{r(R-r)}\,v_c \;=\; \frac{MR}{mr(R-r)}\,v_b$$

Substituyendo las expresiones de v_c y ω_c en la expresión del balance de energía tenemos:

$$v_b \;=\; \sqrt{\frac{2mgR}{M \;+\; \frac{M^2}{m} \;+\; \frac{M^2R^2}{2m(R-r)^2}}}$$

V. Oscilaciones

41. Un bloque de 4 Kg de masa vibra con movimiento armónico simple con una amplitud $x_0 = 9cm$ y un periodo $T = 3s$ Encontrar: a) la frecuencia f, b) su velocidad máxima y su velocidad cuando el desplazamiento es $x = 6cm$, c) la máxima fuerza de restauración que actúa sobre él y la fuerza de restauración cuando $x = 5cm$, d) su energía cinética máxima, e) su energía potencial máxima, f) la energía total del bloque vibrante en cualquier posición.

Solución:

a) $f = 1/T = 1/3Hz$; $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{3} rads^{-1}$.

b) $x = x_0 cos(\omega t)$, por lo tanto $V = -\omega x_0 sen(\omega t)$. Entonces, $V_{max} = \omega x_0 = 6\pi cms^{-1}$.

Cuando el desplazamiento es 6 cm, $6 = 9cos(\alpha)$, y $V_6 = -\omega x_0 sen(\alpha)$, luego $V_6 = 6\pi\sqrt{1 - cos^2(\alpha)} = 2\pi\sqrt{5}cms^{-1}$.

c) $F = ma = -m\omega^2 x_0 cos(\omega t)$, luego $F_{max} = m\omega^2 x_0 = 0,16\pi^2 Nw$.

$F_5 = m\omega^2 0,05 = \frac{0,8}{9}\pi^2 Nw$.

d) $E_{cmax} = \frac{1}{2} m V_{max}^2 = 72\pi^2 10^{-4} Julios$.

e) Tomando como origen de potenciales el punto en que $X = 0$, la energía potencial máxima es igual a la energía cinética máxima.

f) La energía total del bloque es igual a la energía potencial máxima o cinética máxima, ya que los puntos de energía potencial máxima son aquellos donde la cinética vale cero y viceversa.

42. Una bala de 10 g choca con un bloque de 990 g que está unido a un resorte. Por efecto del choque el resorte se comprime 10 cm. Sabemos que para comprimir el resorte 1 cm se necesitan 10^5 dinas. Se supone que antes del choque el resorte tiene su longitud natural, y que la bala queda incrustada en el bloque. Se pide: a) energía potencial máxima almacenada en el resorte después del choque, b) velocidad del bloque justamente después del choque con la bala, c) velocidad inicial de la bala.

Solución:

a) Del enunciado se obtiene directamente la constante del resorte, que es $K = F/x = 10^5 dinascm^{-1}$. Entonces tenemos:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = 5 \times 10^6 erg$$

b) Por conservación de la energía, la energía cinética después del choque será igual a la energía potencial después de la compresión, luego:

$$\frac{1}{2}(M + m)V^2 = E_p$$

y, por tanto, $V = 10^2 cms^{-1}$.

c) En el choque se conserva la cantidad de movimiento, luego $mv = (M + m)V$, despejando v se obtiene $v = 10^4 cms^{-1}$.

43. Se tiene una masa m unida a un resorte de constante k y con un amortiguamiento debido a una fuerza disipativa proporcional a la velocidad de la masa, con la constante de proporcionalidad igual a $k/2$. a) Si la amplitud inicial es A ¿cuánto tiempo transcurre hasta que la

amplitud vale $A/2$? b) ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que se ha disipado la mitad de la energía total inicial?

Solución:

a) Como $b = \frac{k}{2}$, la amortiguación de la amplitud se verifica a un ritmo $Ae^{-kt/4m}$, luego para que la amplitud se reduzca a la mitad, tendremos:

$$\frac{1}{2} = e^{-kt/4m}$$

o bién $t = \frac{4m}{k} ln2$.

b) La amortiguación de la energía se verifica a un ritmo $Ae^{-kt/2m}$, luego para que la energía se reduzca a la mitad, tendremos:

$$\frac{1}{2} = e^{-kt/2m}$$

o bién $t = \frac{2m}{k} ln2$.

44. Considere una barra delgada con masa $M = 4kg$ y longitud $l = 1,2m$, que oscila sin rozamiento en un plano vertical alrededor de un eje horizontal que pasa por un punto de la barra situado a $l/4$ de uno de los extremos de la misma. Se pide: a) Obtener una ecuación para la aceleración angular de la barra como función del ángulo de desplazamiento respecto de la vertical, b) el periodo del movimiento para pequeñas oscilaciones respecto a la vertical.

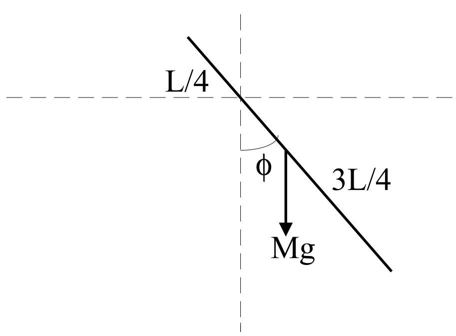

Figura 30: Problema 44.

Solución:

a) Al plantear la ecuación para la dinámica de la rotación de la barra hay que considerar que la única fuerza que produce momento respecto al eje de giro es el peso de la barra que está aplicado en el centro de masas de la misma. Por tanto, para una posición genérica de la barra en la que ésta forma un ángulo ϕ con la vertical tenemos:

$$I_c \alpha = mg\frac{l}{4} sen\phi$$

donde I_c es el momento de inercia de la barra respecto al eje de giro, y α la aceleración angular. I_c se calcula aplicando el teorema de Steiner y resulta

$$I_c = \frac{1}{12}ml^2 + m\frac{l^2}{16} = \frac{7}{48}ml^2$$

Por lo que la ecuación para la aceleración angular resulta ser

$$\alpha = \frac{12}{7}\frac{g}{l} sen\phi$$

b)La ecuación anterior resulta ser la de un péndulo. Haciendo la aproximación de pequeñas oscilaciones ($sen\phi = \phi$)e identificando el factor que multiplica a ϕ con el cuadrado de la frecuencia angular ω tenemos

$$\omega^2 = \frac{12}{7}\frac{g}{l}$$

con lo que

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{7l}{3g}} = 1,68s$$

45. Se tienen dos masas puntuales iguales m colocadas en los extremos de una varilla sin masa de longitud l. La varilla puede girar sin rozamiento en un plano vertical sobre un pivote colocado a una distancia $l/4$ de uno de sus extremos. Se pide: a) calcular el momento de inercia del sistema respecto al punto de suspensión, b) la ecuación del movimiento, c) el periodo de oscilación, para pequeñas oscilaciones, y d) el periodo de oscilación en el caso de que las masas en lugar de ser puntuales fueran pequeñas esferas de radio r.

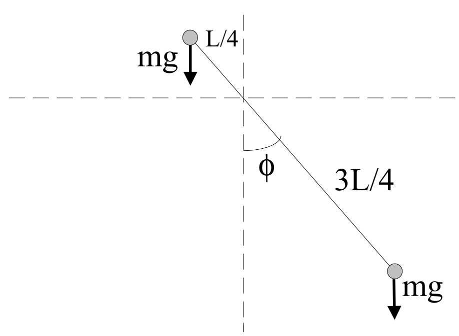

Figura 31: Problema 45.

Solución:

a) El momento de inercia del sistema será la suma de los momentos de inercia de cada una de las masas:

$$I = m(\frac{l}{4})^2 + m(\frac{3l}{4})^2 = \frac{5}{8}ml^2$$

b) Para escribir la ecuación del movimiento basta considerar que el movimiento posible es una rotación entorno al eje y, por lo tanto, la ecuación a considerar es la de la dinámica de rotación, que establece que la suma de los momentos respecto al eje de las fuerzas exteriores es igual al producto del momento de inercia del sistema por la aceleración angular. Por lo tanto:

$$I\frac{d^2\phi}{dt^2} = -mg\ sen\phi\ \frac{3l}{4}\ +\ mg\ sen\phi\ \frac{l}{4}\ =\ -\frac{1}{2}mglsen\phi$$

que simplificando queda:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{4g}{5l}sen\phi$$

c)Para pequeñas oscilaciones la ecuación queda:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{4g}{5l}\phi$$

que es la ecuación de un oscilador armónico de frecuencia angular $\omega = \sqrt{\frac{4g}{5l}}$, y como $T = \frac{2\pi}{\omega}$, Tenemos:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{5l}{4g}}$$

d) Si las masas en vez de ser puntuales fuesen esferas de radio r, el cálculo de los momentos de las fuerzas exteriores no cambiaría, pero sí el momento de inercia. Para calcular el momento de inercia de cada esfera tenemos que aplicar el teorema de Steiner:

$$I = \frac{2}{5}mr^2 + m(\frac{l}{4})^2 + \frac{2}{5}mr^2 + m(\frac{3l}{4})^2 = \frac{5}{8}ml^2 + \frac{4}{5}mr^2$$

Rehaciendo todos los pasos anteriores con el nuevo momento de inercia llegamos al resultado:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{25l^2 + 32r^2}{20gl}}$$

46. Se tiene una barra de masa m y longitud l que tiene en uno de sus extremos una masa puntual M. La barra está suspendida por el otro extremo de un techo horizontal por medio de un soporte que le permite girar sin rozamiento en un plano vertical. La barra forma un ángulo α_o con la vertical debido a la acción de una cuerda unida a la barra en su punto medio y que tira de ella horizontalmente. Se pide: a) calcular la tensión de la cuerda en la posición inicial, b) escribir la ecuación del movimiento del sistema si se corta la cuerda, c) calcular la frecuencia de oscilación en la aproximación de pequeñas oscilaciones.

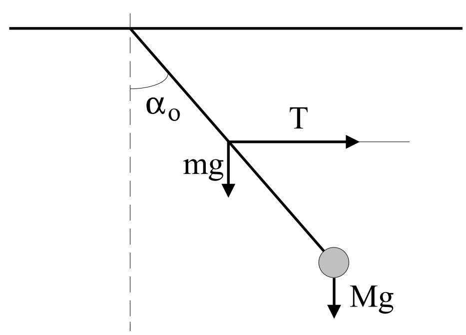

Figura 32: Problema 46.

Solución:

a) El único movimiento que puede realizar la barra es una rotación en torno al soporte del techo, luego la condición para que no haya movimiento es que la suma de los momentos respecto a ese eje de las fuerzas exteriores sea nulo. Las fuerzas exteriores a considerar son el peso de la barra mg que se considera aplicado en su centro de gravedad que es su punto medio, el peso de la masa puntual Mg situada en el extremo de la barra, y la tensión de la cuerda, de la cual nos dicen que actúa horizontalmente y en el punto medio de la barra. Por lo tanto, la ecuación de balance de momentos es:

$$T\frac{l}{2}cos\alpha_o = Mglsen\alpha_o + mg\frac{l}{2}sen\alpha_o$$

de donde

$$T = (m + 2M)g\ tan\alpha_o$$

b) Si se corta la cuerda el momento debido a la tensión desaparece, y el momento resultante será igual al producto del momento de inercia respecto al eje de giro por la aceleración angular. El momento de inercia de la masa M respecto al eje será Ml^2,mientras que para calcular el correspondiente a la barra hay que aplicar el teorema de Steiner:

$$I = Ml^2 + \frac{1}{12}ml^2 + m(\frac{l}{2})^2 = (M + \frac{m}{3})l^2$$

Por lo tanto, la ecuación final queda:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{M + \frac{m}{2}}{M + \frac{m}{3}}\frac{g}{l}sen\phi$$

c) Para pequeñas oscilaciones la ecuación queda:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{M + \frac{m}{2}}{M + \frac{m}{3}}\frac{g}{l}\phi$$

Como $f = \frac{\omega}{2\pi}$, la expresión final para f es:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{M + \frac{m}{2}}{M + \frac{m}{3}}\frac{g}{l}}$$

VI. Gravitación

47. **Un satélite artificial se lanza, en dirección paralela a la superficie de la Tierra, desde una altura $h = 500km$. Determinar su velocidad inicial, v_0, para que describa una órbita circular. Suponer que los únicos datos, además de la altura h, son el radio de la Tierra ($R = 6.371km$) y la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra ($g = 9,8m/s^2$).**

Solución: Como nos dicen que el movimiento será circular, se tendrá que cumplir

$$m\frac{v_0^2}{R+h} = G\frac{Mm}{(R+h)^2}$$

donde M es la masa de la Tierra y m la masa del satélite. En primer lugar vemos que la masa del satélite aparece en los dos miembros de la ecuación, por lo que puede simplificarse, de forma que no interviene en la solución del problema. Para calcular la masa de la Tierra suponemos el satélite justo en la superficie terrestre, de forma que la segunda ley de Newton nos dice que

$$F = G\frac{Mm}{R^2} = mg$$

de donde se deduce $GM = gR^2$, que sustituído en la ecuación (1) nos conduce a la solución pedida

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}$$

que sustituyendo los valores nos da, $v_0 = 7,6kms^{-1}$

48. **Una partícula está sometida a una fuerza atractiva que varía en razón inversa del cuadrado de la distancia, $F = -k/r^2$. La trayectoria seguida por la partícula es una circunferencia de radio r. Demostrar: a) que su energía total E vale $-k/2r$; b) que su momento angular es $L = (mkr)^{1/2}$.**

Solución:

a) Como F es una fuerza central, el campo de fuerzas es conservativo, por lo que la energía potencial se puede calcular como

$$U = -\int_{\infty}^{r} F(r)dr = -\int_{\infty}^{r}(-k/r^2)dr = -k/r$$

y, de acuerdo con el principio de la conservación de la energía mecánica

$$E_{total} = E_c + U = \frac{1}{2}mv^2 + (-k/r)$$

pero como la partícula se mueve en una circunferencia de radio r, la fuerza que actúa sobre ella valdrá $F = -mv^2/r = -k/r^2$ (recordar que el signo - indica que tanto la fuerza como la aceleración están dirigidas hacia el centro de fuerzas), es decir

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{k}{2r}$$

Sustituyendo este valor en la expresión para la energía total nos queda

$$E_{total} = -\frac{k}{2r}$$

b) En el apartado anterior se dedujo que la velocidad valía $v = (k/mr)^{1/2}$, de forma que el momento angular (su módulo) vale

$$L = rmv = rm \left(\frac{k}{mr} \right)^{1/2} = (mkr)^{1/2}$$

que es lo que queríamos demostrar.

49. **Una pequeña luna de masa m y radio a orbita alrededor de un planeta de masa M describiendo un círculo de radio r y manteniendo siempre la misma cara hacia el planeta. Suponiendo que $r \gg a$, demostrar que si la luna se acerca al planeta a una distancia menor que $r_c = a(3M/m)^{1/3}$, una roca "suelta" sobre la superficie de la luna se elevará (en relación a la superficie lunar) por efecto de la atracción gravitatoria del planeta.**

Solución: Consideremos una pequeña roca de masa μ sobre la superficie de la luna. Como nos dicen que la luna mantiene la misma cara hacia el planeta en su movimiento circular, la velocidad de la roca será la misma que la de la luna alrededor del planeta, que viene dada por $GMm/r^2 = mv^2/r = mr\omega^2$, donde hemos usado la velocidad angular $\omega = v/r$. De aquí deducimos que

$$\omega^2 = \frac{GM}{r^3} \tag{1}$$

Escribamos ahora la segunda ley de Newton para la roca sobre la luna. Las fuerzas que actúan sobre la misma son: la fuerza de atracción gravitatoria de la luna sobre la roca, dirigida hacia el centro de la luna; la fuerza de atracción gravitatoria del planeta sobre la roca, dirigida hacia el centro del planeta, y la fuerza de contacto, F, entre la roca y la luna, es decir, la fuerza normal que la luna ejerce sobre la roca y que impide que esta "penetre", por efecto de la atracción gravitatoria, en el interior de la luna, dirigida, por consiguiente, hacia el exterior de la luna, es decir, hacia el planeta (ya que la luna presenta siempre la misma cara en su órbita alrededor del mismo). La suma (vectorial) de estas tres fuerzas debe ser igual al producto de la masa de la roca por la aceleración centrípeta de la roca, es decir

$$\frac{GM\mu}{(r-a)^2} - \frac{Gm\mu}{a^2} + F = \mu(r-a)\frac{GM}{r^3} \tag{2}$$

donde en el segundo miembro hemos sustituido ω^2 por la expresión (1) encontrada anteriormente.

A medida que la luna se acerca al planeta la atracción gravitatoria de este sobre la roca será mayor, pero mientras la fuerza de contacto F sea distinta de cero, la roca continuará "pegada" a la superficie de la luna. Así pues la condición para que la roca empiece a elevarse es $F = 0$. Poniendo esta condición en (2), simplificando y reordenando términos llegamos a

$$\frac{Ma^3}{mr^3} = \frac{(r-a)^2}{3r^2 - 3ra + a^2} \simeq \frac{1}{3} \tag{3}$$

donde en la última parte de la ecuación hemos usado la condición $r \gg a$ para aproximar la fracción por el valor 1/3.

Finalmente, despejando en (3) obtenemos el resultado pedido

$$r_c \simeq a(3M/m)^{1/3} \tag{4}$$

que nos da la distancia a partir de la cual la roca se elevaría por efecto de la atracción gravitatoria del planeta.

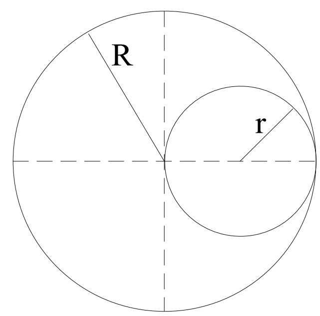

Figura 33: Problema 50.

50. **Una esfera de radio R tiene su centro en el origen de coordenadas. Posee una densidad de masa uniforme ρ_0 exceptuando el hecho de que tiene un agujero esférico de radio $r = R/2$ cuyo centro se encuentra en $x = R/2$, como se muestra en la figura. Calcular el campo gravitatorio en los puntos del eje x para los que se cumple que $x \geq R$.**

Solución: El campo gravitatorio es una magnitud vectorial, de forma que el campo producido por dos cuerpos es la suma (vectorial) del campo producido por cada uno de ellos por separado. En nuestro caso tenemos una esfera maciza a la que le falta un trozo, de forma que el campo gravitatorio en un punto P será el producido por la esfera si no tuviera el hueco *menos* el que produciría el hueco si también fuera macizo. Así pues, llamando $\vec{g}_R$ y $\vec{g}_r$ a los campos gravitatorios de la esfera y del hueco, respectívamente, tenemos que el campo gravitatorio en un punto P situado a una distancia x del centro de la esfera se puede poner como

$$\vec{g}_P = \vec{g}_R - \vec{g}_r = -\frac{GM}{x^2}\vec{\imath} - \left(-\frac{Gm}{(x-r)^2}\right)\vec{\imath}$$

donde $\vec{\imath}$ es el vector unitario en la dirección del eje x, $M = (4/3)\pi R^3 \rho_0$ es la masa de la esfera (si no hubiera hueco) y $m = (4/3)\pi r^3 \rho_0$ es la "masa" del hueco (si fuera macizo). Teniendo en cuenta que $r = R/2$, nos queda finalmente

$$\vec{g}_P = -\frac{G\pi R^3 \rho_0}{6}\left[\frac{8}{x^2} - \frac{1}{\left(x - \frac{R}{2}\right)^2}\right]\vec{\imath}$$

que es el campo gravitatorio pedido.

51. **Las mareas se producen como consecuencia de las fuerzas gravitatorias ejercidas por el Sol y la Luna sobre los océanos y la Tierra. (a) Demostrar que el cociente entre la fuerza ejercida por el Sol y la ejercida por la Luna es $M_S r_L^2 / M_L r_S^2$, en donde M_S y M_L son las masas del Sol y de la Luna y r_S y r_L son las distancias de la Tierra al Sol y a la Luna. Evaluar numéricamente este cociente. (b) A pesar de que el Sol ejerce una fuerza mucho mayor sobre el océano que la ejercida por la Luna, ésta produce un efecto mucho mayor sobre las mareas, porque el hecho importante es la *variación* en la fuerza cuando la distancia al océano varía (debido a la rotación terrestre). Demostrar que para una pequeña variación de la distancia, la variación de la fuerza ejercida por el Sol está relacionada con la variación de la fuerza ejercida por la Luna por**

$$\frac{\Delta F_S}{\Delta F_L} \approx \frac{M_S r_L^3}{M_L r_S^3}$$

y evaluar numéricamente esta relación.