Solución:

a) El módulo de la fuerza Sol-Tierra vale $F_S = GM_SM_T/r_S^2$ y el de la fuerza Luna-Tierra $F_L = GM_LM_T/r_L^2$, por lo que el cociente vale

$$\frac{F_S}{F_L} = \frac{M_S r_L^2}{M_L r_S^2} \approx 177$$

b) Para calcular la variación de la fuerza con la distancia derivamos la expresión de la fuerza con respecto a la distancia

$$\begin{aligned} \frac{dF_S}{dr} &= -2G\frac{M_SM_T}{r_S^3} \\ \frac{dF_L}{dr} &= -2G\frac{M_LM_T}{r_L^3} \end{aligned}$$

si la variación de la distancia no es infinitesimal podemos poner $dF/dr \approx \Delta F/\Delta r$ y el cociente vale

$$\frac{\Delta F_S}{DeltaF_L} \approx \frac{M_S r_L^3}{M_L r_S^3} \approx 0,45$$

de manera que se observa como en este caso el efecto de la Luna es más importante que el del Sol.

52. **Investigando el planeta Norc, situado en otro sistema solar, encontramos que su radio es R y que el período de un satélite en una órbita circular de radio r alrededor de Norc es T. Se pide: (a) la masa de Norc; (b) el valor del campo gravitatorio en la superficie de Norc; (c) suponiendo que el planeta es homogéneo (densidad constante), calcular la profundidad a la que debe introducirse un cuerpo para que su peso sea el mismo que a una altura h sobre la superficie del planeta.**

Solución:

a) Sea M la masa de Norc y m la masa del satélite en la órbita. La segunda ley de Newton nos da

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

pero, $v = 2\pi r/T$, de forma que

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 G}$$

b)Si g es el valor de la gravedad en la superficie de Norc, y m es la masa de un cuerpo en su superficie, se tiene

$$G\frac{Mm}{R^2} = mg \quad \Longrightarrow \quad g = \frac{GM}{R^2}$$

c) Sea P el peso de un cuerpo. A una altura h se tiene

$$P = G\frac{Mm}{(R+h)^2}$$

donde m es la masa del cuerpo y $M = (4/3)\pi R^3\rho$ es la masa de Norc (ρ es la densidad que se supone constante). A una profundidad h' será

$$P = G\frac{M'm}{(R-h')^2}$$

con $M' = (4/3)\pi(R-h')^3\rho$. Igualando y simplificando, nos queda finalmente

$$h' = R - \frac{R^3}{(R+h)^2}$$

53. **Un planeta esférico recientemente descubierto tiene una densidad de masa doble que la de la Tierra, pero la aceleración debida a la gravedad sobre su superficie es exactamente la misma que la que se obtiene sobre la superficie de la Tierra. Se pide: (a) encontrar el radio del planeta en función del radio de la Tierra; (b) demostrar que la energía cinética que necesitaría una nave espacial, colocada a una distancia r del planeta, para escapar de la atracción del mismo es el doble que la energía cinética necesaria para que la misma nave girara alrededor del planeta en una orbita circular a la misma distancia r. ¿Sería este último resultado válido también para la Tierra?.**

Solución:

a) La aceleración debida a la gravedad en la superficie de un planeta de masa M y radio R viene dada por $g_p = GM/R^2$. Si el planeta se considera esférico con una densidad ρ su masa es $M = (4/3)\pi R^3\rho$, de forma que

$$g_p = \frac{4}{3}\pi G R\rho$$

como nos dicen que la aceleración debida a la gravedad en el planeta es igual que en la Tierra, ponemos $g_p = g_{Tierra}$, por lo que, simplificando el factor $(4/3)\pi G$ nos queda

$$R\rho = R_{Tierra}\rho_{Tierra}$$

de forma que como nos dicen que $\rho = 2\rho_{Tierra}$, obtenemos finalmente

$$R = \frac{1}{2}R_{Tierra}$$

b) Para calcular la energía cinética mínima de escape utilizamos el principio de conservación de la energía entre el punto situado a una distancia r de la superficie del planeta y el infinito a donde llega la nave con velocidad cero (ya que buscamos la energía mínima de escape), es decir

$$E_{c,r} + E_{p,r} = E_{c,\infty} + E_{p,\infty} \implies \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{R+r} = 0$$

donde R es el radio del planeta, se ha tomado el infinito como origen de energías potenciales de forma que $E_{p,\infty} = 0$, y, además, la energía cinética $E_{c,\infty} = 0$ por lo dicho anteriormente. Por lo tanto la energía cinética que hay que comunicar a la nave para que llegue al infinito vale

$$E_{c,r} = \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{mM}{R+r}$$

Por otra parte si la misma nave gira alrededor del planeta a una distancia r de su superficie con una velocidad v' la segunda ley de Newton conduce a

$$F = ma \implies G\frac{mM}{(R+r)^2} = m\frac{v'^2}{R+r}$$

donde hemos puesto que la aceleración es la centrípeta pues describe un movimiento circular alrededor del planeta. De aquí deducimos que $E'_{c,r} = (1/2)mv'^2 = GmM/2(R+r)$, de forma que comparando con la energía cinética de escape obtenemos

$$E_{c,r} = 2E'_{c,r}$$

Finalmente, de la propia deducción de este resultado se ve que también será válido en la Tierra y en cualquier otro planeta que se considere esférico.

54. **Un satélite describe una órbita** *elíptica* **alrededor de un planeta de radio R y en el que la aceleración de la gravedad vale g. La separación entre el satélite y el centro del planeta varía entre r_p (en el** *perigeo* **o punto de mínima separación) y r_a (en el** *apogeo* **o punto de máxima separación). El módulo de la velocidad en el perigeo vale v_p. Se pide: a) Demostrar que la velocidad en el apogeo, v_a, es** *menor* **que en el perigeo; b) Calcular el módulo de la velocidad en el apogeo, v_a, cuando $R = 6.370\ Km.$, $g = 9,8\ m/s^2$, $r_p = 7.200\ Km.$ y $v_p = 8\ Km/s$; c) Calcular el módulo de la velocidad del satélite, v_s, cuando se encuentra a una distancia de $r_s = 8.400\ Km.$; d) ¿Sabría contestar a los apartados anteriores b) y c) sin conocer los valores de R y g ?.**

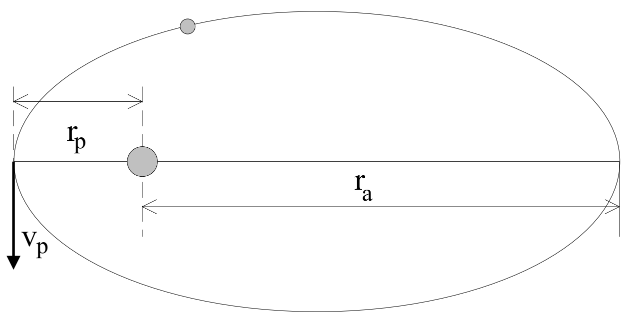

Figura 34: Problema 54.

Solución:

a) Suponiendo el planeta fijo, la única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza de atracción gravitatoria que es una fuerza central conservativa, por lo que en todos los puntos de la trayectoria se conserva la energía total. Suponiendo que la masa del planeta es M y la masa del satélite es m, la energía total en un punto de la trayectoria a una distancia r_x del planeta viene dada por

$$E_x = \frac{1}{2}mv_x^2 - \frac{GMm}{r_x}$$

Puesto que esta energía total se mantiene constante, para calcular la velocidad en el apogeo igualamos la energía total en el apogeo con la energía en el perigeo, es decir, ponemos $E_a = E_p$, de donde, despejando v_a, se obtiene

$$v_a = \sqrt{v_p^2 + 2gR^2 , \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_p}\right)}$$

donde hemos tenido en cuenta que $GM = gR^2$. De la ecuación anterior se deduce que, como r_a¿r_p el segundo término en la raíz cuadrada es negativo, por lo que v_a ¡ v_p

b) Para poder aplicar la fórmula para v_a encontrada en el apartado anterior nos falta conocer el valor de r_a que no nos lo dan en el enunciado. Para ello hacemos uso del hecho de que la fuerza sobre el satélite es una fuerza central, por lo que el momento angular orbital del satélite respecto al planeta se conserva, de forma que

$$L = mvr \operatorname{sen}\phi = \text{constante}$$

donde ϕ es el ángulo que forma la recta que une el planeta con el satélite y la velocidad del satélite. En el apogeo y en el perigeo se tiene $\phi = \pi/2$ de forma que $\operatorname{sen}\phi = 1$, por lo que $v_a r_a = v_p r_p$, que permite escribir $r_a = v_p r_p / v_a$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación para v_a del apartado anterior y operando, se encuentra una ecuación de segundo grado para v_a cuyas soluciones son

$$v_a = v_p; \quad v_a = \frac{2gR^2}{r_p v_p} - v_p$$

por lo que, descartando la primera, ya que en la primera parte hemos demostrado que v_a¡v_p, y dando los valores numéricos que nos dicen, se encuentra finalmente $v_a = 5,82\ Km/s$

c) Sustituyendo en la fórmula del apartado a) la distancia r_c encontramos ahora $v_c = 6,94\ Km/s$

d) Tal y como está enunciado el problema la respuesta es NO. Si nos hubieran dado el valor de r_a se podría haber usado la conservación del momento angular para calcular $v_a = r_p v_p / r_a$ sin necesidad de conocer R ni g, pero para el apartado c) sí necesitaríamos estos valores, ya que desconocemos el valor del ángulo ϕ que aparece en el momento angular.

55. **Suponiendo que la Tierra tuviese exactamente simetría esférica, se pide: a) Demostrar que g a una altura h sobre la superficie terrestre tal que $h \ll R_T$ (R_T es el radio de la Tierra) puede escribirse** *en primera aproximación* **como**

$$g \approx \left(\frac{GM_T}{R_T^2}\right)\left(1 - \frac{2h}{R_T}\right)$$

b) Calcular el tanto por ciento de reducción que experimenta la aceleración de la gravedad al aumentar la altura en 10 Km sobre la superficie terrestre.

(Ayuda: Redordar el desarrollo del binomio $(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)x^2/2! + \dots$)

Solución:

a) A una altura h sobre la superficie terrestre tenemos

$$g = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2} = \frac{GM_T}{R_T^2}\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^{-2}$$

Utilizando ahora el desarrollo del binomio, se tiene, en primera aproximación (es decir, despreciando términos que involucran potencias de orden dos o superior), $(1 + h/R_T)^{-2} \approx 1 - 2h/R_T$, por lo que

$$g \approx \left(\frac{GM_T}{R_T^2}\right)\left(1 - \frac{2h}{R_T}\right)$$

que es el resultado pedido.

b) Utilizando el resultado anterior tenemos

$$\Delta g = g' - g = \left(\frac{GM_T}{R_T^2}\right)\left(1 - \frac{2h}{R_T}\right) - \frac{GM_T}{R_T^2} = -\frac{2GM_T h}{R_T^3}$$

de forma que el cambio fraccional vendrá dado por

$$\frac{\Delta g}{g} = -\frac{2h}{R_T}$$

Dando los valores numéricos se encuentra $\Delta g/g = -3 \times 10^{-3}$ (el signo menos indica que g disminuye con la altura), por lo que el porcentaje pedido es el 0,3

56. **Dos planetas de masas iguales, m, orbitan alrededor de una estrella de masa mucho mayor, M, de forma que la interacción gravitatoria planeta-planeta se puede despreciar frente a la interacción planeta-estrella. El planeta 1 se mueve en una órbita** circular **de radio $r_1 = 10^{11}\ m$ y periodo $T_1 = 2$ años. El planeta 2 se mueve en una órbita** elíptica **cuya distancia mas próxima a la estrella (perihelio, P) es también r_1 y la mas alejada (afelio, A) es $r_2 = 1,8 \times 10^{11}\ m$. Se pide: a) Utilizando el hecho de que el radio medio de una órbita elíptica es la longitud del semieje mayor, hallar el periodo de la órbita del planeta 2; b) Calcular la masa de la estrella; c) Sabiendo que la velocidad del planeta 2 en el afelio vale $v_{2A} = 6\ Km\,/\,s$, ¿cuál de los dos planetas tiene mayor energía total?; d) ¿Cuál de los dos planetas tiene mayor velocidad en el perihelio (P)? (Dato: $G = 6,67 \times 10^{-11}\ N\,m^2\,/\,Kg^2$).**

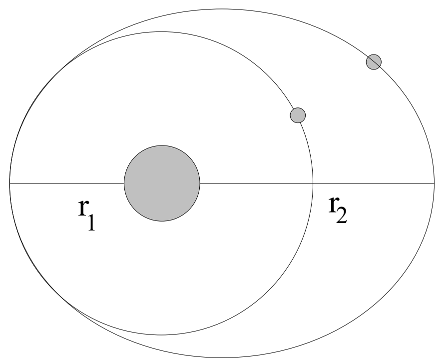

Figura 35: Problema 56.

Solución:

a) En primer lugar calculamos el radio medio de la órbita elíptica $R = (r_1 + r_2)/2 = 1,4 \times 10^{11}\ m$. Para calcular el periodo utilizamos la tercera ley de Kepler, $T^2 = C\, r^3$, donde C es una constante. Aplicando esta ley a los dos planetas se obtiene

$$T_2 = T_1 \left(\frac{R}{r_1}\right)^{3/2}$$

que, dando los valores numéricos, nos queda $T_2 = 3,31$ años.

b) La misma ley de Kepler, con el valor explícito de la constante C, nos dice $T^2 = (4\pi^2/GM)\ /\ r^3$, de forma que, despejando la masa de la estrella

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

Dando ahora los valores de, por ejemplo, el periodo y el radio de la órbita del planeta 1, se obtiene el valor numérico $M = 1,49 \times 10^{29}\ Kg$.

c) Para responder a este apartado se puede usar el método directo de calcular la energía total de cada uno de los planetas y compararlas. Sin embargo, aquí usaremos otra forma que además nos permitirá responder al siguiente apartado del problema.

Consideremos los dos planetas cuando pasan por el punto P (perihelio). Como en ese momento los dos se encuentran a la misma distancia de la estrella, y su masa es también la misma, su energía potencial gravitatoria es igual para los dos, de forma que el planeta con mayor energía total será aquél que tenga mayor energía cinética en ese punto, es decir, que tenga mayor velocidad al pasar por P. Para el planeta 1 su velocidad en P (en realidad en cualquier punto de la órbita, pues es circular) se encuentra igualando la fuerza gravitatoria estrella-planeta con la fuerza centrípeta,

$$G\frac{Mm}{r_1^2} = m\frac{v_1^2}{r_1} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}} = 9.969\, m/s$$

Para encontrar la velocidad en el punto P del planeta 2 usamos el hecho de que el momento angular se conserva, por lo que, igualando el momento angular en el punto A con el del punto P, encontramos

$$r_1 m v_{2P} = r_2 m v_{2A} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{2P}}{v_{2A}} = \frac{r_2}{r_1} = 1,8 \quad \Rightarrow \quad v_{2P} = 1,8\, v_{2A} = 10.800\, m/s$$

De esta forma, vemos que el planeta 2 tiene mayor velocidad en el punto P que el planeta 1; v_{2P}¿v_{1P}. Por lo tanto, el planeta 2 tendrá mayor energía cinética y, por consiguiente, mayor energía total, es decir E_{T2}¿E_{T1}

57. **Suponer que la Tierra es una esfera maciza de densidad uniforme, masa total M y radio R. Se taladra un túnel desde su superficie hasta su centro. Se pide: a) Demostrar que el módulo del campo gravitatorio en el interior del túnel, a una distancia r del centro (es decir, $r < R$) vale $g_r = g\, r/R$, donde g es el campo gravitatorio en la superficie; b) ¿Cuánto trabajo se necesitaría para trasladar un objeto de masa m desde el centro de la Tierra hasta su superficie? c) Si se dejase caer el objeto por la abertura del túnel en la superficie, ¿con qué velocidad llegaría al centro? d) Suponiendo que la Tierra gira con velocidad angular constante ω, alrededor de un eje fijo, y que el túnel es perpendicular al eje de giro, calcular ω para que los objetos dentro del túnel no tengan aceleración** relativa **al túnel.**

Solución:

a) En un punto a una distancia r del centro, en el interior de una esfera maciza de radio total R y densidad uniforme, sólo la masa dentro de una esfera de radio r contribuye al campo gravitatorio en ese punto. La fracción de la masa total de la esfera que está dentro del radio r es igual al cociente entre el volumen de una esfera de radio r y el de una esfera de radio R, es decir, si M es la masa total de la esfera y M' es la masa de la esfera de radio r, se tiene

$$M' = \frac{(4/3)\pi r^3}{(4/3)\pi R^3}\, M = \frac{r^3}{R^3}\, M$$

por lo que el módulo del campo gravitatorio a la distancia r será

$$g_r = \frac{GM'}{r^2} = \frac{GM}{R^2}\left(\frac{r}{R}\right) \quad \Rightarrow \quad g_r = g\, r/R$$

donde $g = GM/R^2$ es el campo gravitatorio en la superficie.

b) El trabajo será $dW = F(r)\, dr$, donde, teniendo en cuenta el apartado anterior, $F(r) = mg_r = mgr/R$, de forma que

$$W = \int_0^R F(r)\, dr = \frac{mg}{R}\int_0^R r\, dr \quad \Rightarrow \quad W = \frac{1}{2} mgR$$

c) Por el teorema trabajo-energía sabemos que el trabajo total realizado sobre una partícula es igual a la variación de energía cinética de la misma, por lo que

$$W = \frac{1}{2} mgR = \Delta E_c = \frac{1}{2} mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gR}$$

d) La fuerza gravitatoria sobre un objeto de masa m situado a una distancia r del centro de la Tierra y en el interior de la misma es $F = mg_r = (GM/R^3)\, mr$. Para que el objeto no tenga aceleración *relativa* al túnel (que está girando con velocidad angular ω) se necesita que la fuerza gravitatoria sea exactamente igual a la fuerza centrípeta necesaria para que el objeto se mueva en un círculo de radio r con velocidad ω, es decir

$$\left(\frac{GM}{R^3}\right) mr = m\frac{v^2}{r} = mr\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{GM/R^3}$$

(Nota: Por curiosidad se puede ver que, dando los valores de G y de la masa y radio de la Tierra, este valor de la velocidad angular ω es aproximadamente 16,5 veces mayor que la velocidad real actual de rotación de la Tierra).

VII. Termodinámica

58. **Un aplicado estudiante de física, cuya afición es el patinaje sobre hielo se halla junto a un pequeño estanque. Hace frío (-10 °C), pero en el estanque sólo hay una capa de hielo de 1 cm de espesor. Entonces el estudiante se pone a calcular cuánto tiempo deberá esperar para que pueda patinar con seguridad (es decir cuando el espesor del hielo sea de 20 cm). ¿ Qué resultado obtiene el estudiante?** Datos: Calor latente de fusión del hielo, $L_f = 333,5\; kJ/kg$. Densidad del hielo $\rho_H = 0,917\; g/cm^3$. Conductividad térmica del hielo, $\kappa_H = 0,592\; W/mK$.

Solución: El agua cede calor a la atmósfera debido a que hay una diferencia de temperatura. La diferencia de temperatura ΔT entre las dos caras de la capa de hielo es siempre constante e igual a $\Delta T = 10\; °C$ $-0°C = 10$ K, ya que en la cara inferior el hielo y el agua coexisten (ello sólo ocurre a 0 °C). El gradiente de temperatura es por tanto igual a $\Delta T/x(t)$, donde $x(t)$ es el espesor de la capa en el instante t.

En un instante cualquiera, el calor por unidad de tiempo $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ que se transmite del agua a la atmósfera es proporcional al gradiente de temperatura, es decir

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \kappa_H A \frac{\Delta T}{x(t)}$$

donde A es el área de la capa de hielo.

¿De dónde sale este calor? Esencialmente de congelar la capa de agua de anchura infinitesimal, Δx, que se halla en contacto con el hielo. Esta capa, por ser muy estrecha, podemos considerar que está toda a la temperatura de 0 °C. El calor que hemos de extraer a esta capa de agua para convertirla en hielo es

$$\Delta Q = m_H L_f = A \Delta x \rho_A L_f$$

donde m_H es la masa de la capa de agua y ρ_A la densidad del agua ($\rho_A = 10^3 kg/m^3$). Así, el calor extraído por unidad de tiempo en la congelación del agua será

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = A \rho_A L_f \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Pero este calor por unidad de tiempo debe coincidir con el transmitido a la atmósfera, de donde igualando se obtiene

$$A \rho_A L_f \frac{\Delta x}{\Delta t} = \kappa_H A \frac{\Delta T}{x(t)}$$

Simplificando y pasando al límite en el que los incrementos son diferenciales tendremos la ecuación diferencial que gobierna la evolución del espesor de la capa de hielo:

$$\frac{dx(t)}{dt} = c \frac{1}{x(t)}$$

La constante c vale $c = \frac{\kappa_H \Delta T}{\rho_A L_f}$ y su valor numérico es, con los datos del problema $c = 1,77 \times 10^{-8}\; m^2/s$. Lo que nos dice la ecuación diferencial es que la velocidad de crecimiento de la capa de hielo es cada vez menor ya que es inversamente proporcional a la anchura de la capa.

La solución de la ecuación diferencial se puede hallar multiplicando ambos miembros por $x(t)$. Como

$$\frac{d}{dt} x^2(t) = 2x(t) \frac{dx(t)}{dt}$$

tenemos que

$$\frac{d}{dt} x^2(t) = \frac{c}{2}$$

Si la derivada de una función es constante es porque esa función es lineal con la variable y por tanto tenemos la solución

$$x^2(t) = \alpha + \frac{c}{2}t$$

donde la constante de integración α se halla a partir de las condiciones iniciales. La solución final es por tanto

$$x(t) = \sqrt{\alpha + \frac{c}{2}t}$$

En el instante inicial ($t = 0$) sabemos que

$$\begin{aligned} 0,01 &= \sqrt{\alpha} \\ \alpha &= 0,0001\, m^2 \end{aligned}$$

El tiempo que habrá de transcurrir para tener $0,2\, m$ de espesor será por tanto

$$t = \frac{2((0,02)^2 - 0,0001)}{1,77 \times 10^{-8}} = 4.406.780\ s$$

Esto son unos 51 días, por lo que si no hace más frío, probablemente el estudiante deberá buscarse otra afición.

59. El estudiante anterior cambió de afición y esperó al verano para hacer submarinismo en el mismo lago. En una de sus inmersiones, se hallaba a una profundidad de $40\, m$ por debajo de la superficie y la temperatura era de $5\, °C$ cuando soltó una burbuja de aire con un volumen de $15\, cm^3$. Nuestro estudiante, viendo cómo se alejaba su burbuja se preguntó que tamaño tendría justo antes de llegar a la superficie, donde la temperatura era de $25\, °C$. Nota: una de las reglas de oro del submarinismo es respirar siempre con normalidad, para evitar que en una subida súbita quede bloqueada la glotis. ¿Porqué?.

Solución: Podemos suponer en primera aproximación que el aire respirado es un gas ideal, con lo cual se satisface la ecuación

$$\frac{PV}{T} = nR$$

Debido a que la cantidad de moles de aire en la burbuja no cambia, tendremos que

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

donde por 1 denotamos el punto a 40 m de profundidad y por 2 el punto donde sale la burbuja en la superficie. De aquí podemos despejar V_2,

$$V_2 = V_1 \frac{P_1 T_2}{P_2 T_1}$$

Las temperaturas las conocemos pero no así las presiones. Pero hallarlas es fácil si recordamos que la presión de una columna de líquido de altura h está dada por $P = \rho g h$, donde ρ es la densidad del líquido y g es la aceleración de la gravedad. Así la presión a 40 m de profundidad será

$$P_1 = P_a + \rho g h$$

donde P_a es la presión atmosférica en la superfície del lago. Además $P_2 = P_a$. Suponiendo que esta presión P_a sea de 1 atm ($= 101,3\, kPa$), podemos substituir los valores conocidos de la densidad del agua ($1\, gr/cm^3$) y de la gravedad ($9,8 m/s^2$) para hallar

$$V_2 = \left(1 + \frac{\rho g h}{P_a}\right) \frac{273 + 25}{273 + 5} V_1 = 5,22 V_1 = 78,3\, cm^3$$

Es decir que el volumen aumenta unas cinco veces. Ahora se entiende porque hay que respirar con normalidad: si se obstruye la glotis y subimos súbitamente los pulmones estallarían.

60. En el punto crítico en la isoterma crítica se cumplen $dP/dV = d^2/dV^2 = 0$. Demostrar que para un gas de van der Waals el volumen crítico es $V_c = 3b$.

Solución: La ecuación de estado de van der Waals es

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

El procedimiento directo sería escribir la presión en la forma

$$P = \frac{1}{V - nb}\left(nRT - \frac{an^2}{V^2}\right)$$

y calcular las derivadas primera y segunda de la presión con respecto al volumen. Con ello deberíamos solucionar simultáneamente un sistema de tres ecuaciones no lineales (de hecho, de segundo, tercer y cuarto orden). Esto se puede hacer pero es demasiado complicado. Seguiremos un camino alternativo en el que escribimos la ecuación de van der Waals en forma de un polinomio de tercer grado en el volumen

$$V^3 - (b + RT/P)V^2 + \frac{a}{P}V - \frac{ab}{P} = 0$$

Esta ecuación muestra que para cada valor de la presión y de la temperatura hay una o tres soluciones, dependiendo de dichos valores. El punto crítico ocurre precisamente cuando las tres soluciones coinciden. El volumen crítico V_c satisface obviamente la ecuación

$$(V - V_c)^3 = V^3 - 3V^2V_c + 3VV_c^2 - V_c^3 = 0$$

y también satisface la ecuación de van der Waals con la temperatura crítica T_c y la presión crítica P_c

$$V^3 - (b + RT_c/P_c)V^2 + \frac{a}{P_c}V - \frac{ab}{P_c} = 0$$

Estos dos polinomios de tercer grado son esencialmente el mismo, por lo que podemos igualar sus coeficientes lo que conduce a

$$\begin{aligned} -3V_c &= -(b + RT_c/P_c), \\ +3V_c^2 &= a/P_c, \\ -V_c^3 &= -ab/P_c \end{aligned}$$

Podemos combinar estas ecuaciones para llegar a los resultados

$$\begin{aligned} P_c &= \frac{a}{27b} \\ V_c &= 3b \\ T_c &= \frac{8a}{27Rb} \end{aligned}$$

61. La capacidad calorífica a volumen constante de cierto gas ideal monoatómico es $48,9\ J/K$. Se pide: a) Determinar el número de moles de gas. b) ¿Cuál es la energía interna de este gas a $T = 300\ K$? c) ¿Cuál es su capacidad calorífica a presión constante?

Solución:

a) La un capacidad calorífica de un gas ideal monoatómico es $C_v = 3nR/2$. Como la constante de los gases es $R = 8,31\ J/mol \cdot K$, obtenemos que el número de moles de este gas es

$$n = \frac{2}{3}\frac{48,9\ J/K}{8,31\ J/mol \cdot K} = 3,92\, mol$$

b) La energía interna de un gas ideal monoatómico está dada íntegramente por su energía cinética, ya que en un gas ideal no hay interacción entre partículas. La energía cinética a su vez está dada por el teorema de equipartición que nos dice que por cada mol de gas y grado de libertad tenemos una contribución de $RT/2$. Como tenemos tres grados de libertad de translación, la energía interna de un gas ideal está dada por $U = 3nRT/2$, con lo que a $T = 300\ K$ los moles obtenidos en (a) contienen la siguiente energía térmica:

$$U = \frac{3}{2}(3,92\, mol\ 8,31\ J/mol \cdot K\ 300\ K) = 14.658,84\ J$$

c) La capacidad calorífica a presión constante se relaciona con la capacidad calorífica a volumen constante a través de la expresión $C_p = C_v + nR$ con lo que en nuestro caso tendremos $C_p = 81,5\ J/K$.

62. La velocidad de escape en Marte es $5,0\ km/s$ y la temperatura de su superficie es de $0\ °C$, mientras que la velocidad de escape de Júpiter es de $60\ km/s$ y su temperatura superficial es de $-150\ °C$. Calcular el valor cuadrático medio de la velocidad de las moléculas de: a) H_2, b) O_2 y c) CO_2 a estas temperaturas. por otro lado, si el valor cuadrático medio de la velocidad de las moléculas de un gas es mayor que un sexto de la velocidad de escape del planeta, todas las moléculas de dicho gas deberían haber escapado de la atmósfera del planeta en el momento actual. Basados en este criterio, d) ¿es probable que se encuentre H_2, O_2 y CO_2 en la atmósfera de Marte? e) ¿y en la de Júpiter?. Datos: Masa molar del $H_2 = 2\ gr/mol$. Masa molar del $O_2 = 32\ gr/mol$. Masa molar del $CO_2 = 44\ gr/mol$.

Solución: La velocidad cuadrática media es una velocidad típica de las moleculas y está relacionada con la temperatura en la forma

$$v_{rcm} \equiv \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

donde $k = 1,381\ 10^{-23}\ J/K$ es la constante de Boltzmann, m es la masa de las moleculas o, alternativamente, $R = 8,31\ J/mol \cdot K$ es la constante de los gases y M es la masa molar del gas. Usaremos esta última expresión ya que nos dan las masas molares de los gases.

a) Para el H_2, en Marte tenemos (no olvidemos pasar la temperatura a Kelvins)

$$v_{rcm} = \sqrt{\frac{3(8,31\ J/mol \cdot K)(273\ K)}{2 \times 10^{-3} kg/mol}} = 1.844,7\ m/s$$

mientras que en Júpiter tenemos que $v_{rcm} = 1.238,2\, m/s$.

b) Para el O_2 en Marte tenemos $v_{rcm} = 461,2\, m/s$ y en Júpiter tenemos $v_{rcm} = 309,5\, m/s$.

c) Finalmente para el CO_2 en Marte se obtiene $v_{rcm} = 393,3\, m/s$, y en Júpiter $v_{rcm} = 264,0\, m/s$.

d) Un sexto de la velocidad de escape en Marte son unos 830 m/s, con lo que no esperamos encontrar hidrógeno en Marte, pero sí oxígeno y dióxido de carbono.

e) En Júpiter en cambio, un sexto de la velocidad de escape son unos 10.000 m/s, con lo que ni siquiera el hidrógeno puede escapar del campo gravitatorio.

63. Un gas ideal, que se encuentra inicialmente en un estado definido por p_i,V_i,T_i, experimenta una expansión isotérmica hasta un estado intermedio m en el que la presión es $p_m = p_i/2$. Seguidamente el gas se comprime a dicha presión constante p_m hasta que el volumen vuelve a su estado inicial. a) Representar estos procesos en un diagrama p-V. b) Determinar los valores de las variables p,V,T para los estados m y f. Expresar estos valores en función de los correspondientes al estado inicial.

Solución:

a) Sabemos que $pV = nRT$. Dado que sufre una expansión isotérmica la temperatura permanece constante, por lo tanto $pV = Cte$, así que

$$p_i V_i = \frac{p_i}{2} V_m,$$

de donde despejando se obtiene:$V_m = 2V_i$. Posteriormente se mueve a lo largo de la recta dada por $p = p_m = p_i/2$ (presión constante) En el gráfico queda:

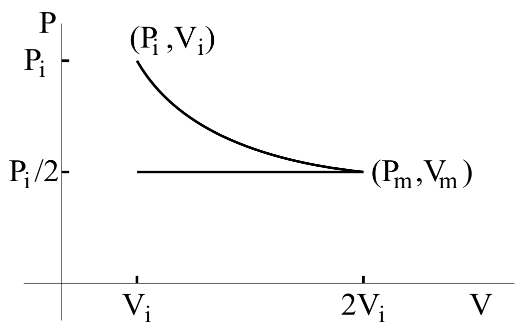

Figura 36: Problema 63.

b) Al estado m llegamos con la misma temperatura T_i por ser un proceso isotérmico. Por otro lado ya hemos calculado $V_m = 2V_i$. Para los valores f tenemos $V_f = V_i$ y $p_f = p_m = p_i/2$. Como la presión permanece constante, $p = nRT/V = constante$

$$nRT_m/V_m = nRT_f/V_f$$

despejando y sustituyendo

$$T_f = T_m V_f/V_m = T_i V_i/(2V_i) = T_i/2$$

64. El coeficiente de expansión de volumen de un gas a presión constante viene definido por $\beta = (1/V)(dV/dT)$,donde al tomar la derivada se considera que la presión es constante.a)Demostrar que para un gas ideal $\beta = 1/T$ b)Evaluar β para un gas ideal a 0^o C.

Solución:

a) Despejando el volumen en la ecuación de los gases perfectos obtenemos $V = nRT/P$, de donde $dV/dT = nR/p$, y por tanto

$$\beta = (1/V)(dV/dT) = p/(nRT)(nR)/p = 1/T$$

b) Sustituyendo el valor de la temperatura obtenemos directamente $\beta = 1/273\ K^{-1}$.

65. Para el caso de un gas ideal que experimenta un proceso adiabático cuasiestático la presión varía con el volumen de tal forma que pV^γ permanece constante. Si p_i, V_i corresponden al estado inicial se tiene que para un volumen V la presión es

$$p = p_i V_i^\gamma / V^\gamma$$

Demostrar que el trabajo realizado por el gas ideal en un proceso adiabático cuasiestático viene dado por

$$W = \frac{p_i V_i}{\gamma - 1}\Big[1 - (V_i/V_f)^{\gamma-1}\Big]$$

Solución: El trabajo viene dado por

$$W = \int_{V_i}^{V_f} pdV = p_i V_i^\gamma \int_{V_i}^{V_f} V^{-\gamma} dV =$$

$$= \frac{p_i V_i^\gamma}{1-\gamma}\Big(V_f^{1-\gamma} - V_i^{1-\gamma}\Big) =$$

$$= \frac{p_i V_i}{\gamma - 1}\Big[1 - (\frac{V_i}{V_f})^{\gamma-1}\Big]$$

66. En el llamado ciclo de Carnot, n moles de un gas ideal se encuentran, inicialmente, a la presión P_1, volumen V_1 y temperatura T_i. El gas experimenta una expansión isotérmica hasta que su presión y volumen son P_2 y V_2. Luego se expande adiabáticamente hasta que la temperatura es T_f y la presión y el volumen son P_3 y V_3. A continuación se comprime isotérmicamente hasta alcanzar la presión P_4 y volumen V_4, el cuál está relacionado con el volumen inicial V_1 por

$$T_f V_4^{\gamma-1} = T_i V_1^{\gamma-1}$$

El gas, finalmente, se comprime adiabáticamente hasta recuperar su estado inicial, completando el ciclo.

a) Suponiendo que cada una de las etapas descritas se realiza de forma cuasiestática, representar este ciclo en un diagrama PV.

b) ¿Cuál es el cambio en la energía interna del gas durante la primera expansión isotérmica?

c) Calcular el calor absorbido Q_i durante la expansión isotérmica a la temperatura T_i, y el calor cedido Q_f por el gas durante la compresión isotérmica a temperatura T_f.

d) Demostrar que

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

e) El rendimiento de este ciclo de Carnot viene definido por el trabajo neto realizado en el ciclo dividido por el calor absorbido Q_i. Teniendo en cuenta el primer principio de la termodinámica, demostrar que este rendimiento, e, es

$$e = 1 - \frac{Q_f}{Q_i}$$

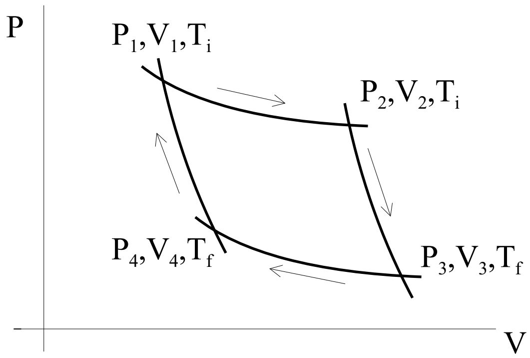

Figura 37: Problema 67.

Solución:

a) En un diagrama PV será

b) Puesto que la energía interna de un gas ideal sólo depende de la temperatura, y en una expansión isoterma la temperatura no varía, se tiene

$$\Delta U_{1\to 2} = 0$$

c) En la expansión isotérmica, el trabajo realizado *por* el gas viene dado por

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\ dV = nRT_i \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT_i\ \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

donde hemos usado la ecuación de los gases ideales $PV = nRT$. Como por otra parte la variación de la energía interna es nula, el calor absorbido durante la expansión será, por el primer principio de la Termodinámica, igual al trabajo realizado *por* el gas, de forma que

$$Q_i = W = nRT_i\ \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

que es positivo ya que V_2¿V_1. De igual forma, en la compresión isotérmica, el calor cedido es igual al trabajo realizado *sobre* el gas, es decir $Q_{ced} = nRT_f\ \ln(V_4/V_3)$, que es negativo puesto que V_4¡V_3. Por lo tanto, la magnitud del calor cedido será

$$Q_f = -Q_{ced} = nRT_f\ \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right)$$

d) Los volúmenes V_2 y V_3 están conectados por una expansión adiabática, por lo que

$$T_i V_2^{\gamma-1} = T_f V_3^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad V_3 = V_2\ (T_i/T_f)^{1/(\gamma-1)}$$

De igual forma

$$T_i V_1^{\gamma-1} = T_f V_4^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad V_4 = V_1\ (T_i/T_f)^{1/(\gamma-1)}$$

por lo que, dividiendo las dos expresiones

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

.

e) En el ciclo completo, la variación de energía interna es nula, ya que el sistema regresa a su estado inicial. Por el primer principio de la Termodinámica se tiene que el trabajo neto será $W = Q_i - Q_f$ (el signo menos es necesario ya que Q_f es la magnitud, positiva, del calor cedido). Por lo tanto el rendimiento será

$$e = \frac{W}{Q_i} = 1 - \frac{Q_f}{Q_i}$$

.

67. Se tiene inicialmente 1 mol de un gas ideal *diatómico* ($\gamma = 1,4$) a una presión $P_1 = 1$ atmósfera, y una temperatura $T_1 = 0°C$. El gas se calienta a volumen constante hasta alcanzar la temperatura $T_2 = 150°C$, y luego se expande adiabáticamente hasta que su presión vuelve a ser 1 atmósfera. Finalmente se comprime a presión constante hasta volver a su estado inicial. Calcular:

a) la temperatura T_3 después de la expansión adiabática,

b) el calor absorbido o cedido por el sistema en cada proceso,

c) el rendimiento de este ciclo,

d) el rendimiento de un ciclo de Carnot que operara entre las temperaturas extremas del ciclo. (Dato: R=0,082 L. atm. / mol. $°K$)

Solución:

a) En primer lugar el volumen en el punto 2 es el mismo que en el punto 1, es decir, $V_2 = nRT_1/P_1 =$ (1 mol) (0,082 L atm/mol $°K$)(273,15 $°K$) / (1 atm) = 22,4 L. La presión en el punto 2 es $P_2 = nRT_2/V_2$ =1,55 atm. Con estos resultados el volumen en el punto 3 es

$$V_3 = V_2 \left(\frac{P_2}{P_3}\right)^{1/\gamma} = V_2 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/\gamma} = 30,6\, litros$$

por lo que la temperatura en el punto 3 será

$$T_3 = \frac{P_3 V_3}{nR} \quad \Rightarrow \quad T_3 = 373,17\, °K = 100,02\, °C$$

b) El calor transferido durante cada proceso es (observar que se usa C_p o C_v dependiendo que el proceso se realice a presión o volumen constante)

$$Q_{12} = C_v \Delta T = \frac{5}{2} nR\Delta T = 3,12\, kJ; \quad Q_{23} = 0; \quad Q_{31} = C_p \Delta T = \frac{7}{2} nR\Delta T = -2,91\, kJ$$

donde se han usado los valores de C_v y C_p correspondientes a un gas ideal diatómico, y el factor de conversión 1 L. atm. = 101,3 J = 0,1 kJ.

c) El rendimiento se define como el trabajo neto realizado en el ciclo dividido por el calor absorbido, de forma que, como la variación de energía interna es nula en el ciclo, ya que se vuelve a las condiciones iniciales, se tiene

$$\epsilon = \frac{W_{neto}}{Q_{abs}} = \frac{Q_{12} - [Q_{31}]}{Q_{12}} = 1 - \frac{[Q_{31}]}{Q_{12}} \quad \Rightarrow \quad \epsilon = 0,067$$

es decir, que la eficiencia es del 6,7 %.

d) En un ciclo de Carnot el rendimiento se calcula como

$$\epsilon_{Carnot} = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{273,15\, °K}{423,15\, °K} = 0,354$$

lo que equivale a una eficiencia del 35,4 %, que, como cabía esperar, es mucho mayor que el ciclo anterior.

68. **Se dispone de gas Helio ($\gamma = 1,67$) a una presión inicial de 16 atm, que ocupa un volumen de 1 L, y cuya temperatura es de 600 K. Se expande isotérmicamente hasta que su volumen es de 4 L y luego se comprime a presión constante hasta que su volumen y temperatura son tales que una compresión adiabática devuelve al gas a su estado inicial. a) Dibujar el ciclo en un diagrama PV. b) Calcular el volumen y la temperatura después de la compresión isobárica. c) Calcular el trabajo realizado durante el ciclo y d) el rendimiento del ciclo.**

Solución: a)

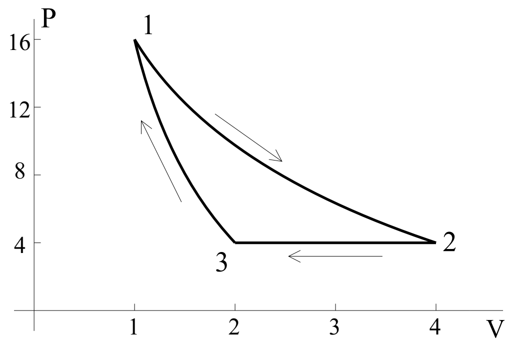

Figura 38: Problema 69.

b) En la fase de expansión isoterma se cumple $PV = cte$, por lo tanto

$$P_3 = P_2 = \frac{P_1 V_1}{V_2} = 4\text{atm}$$

Durante la compresión adiabática se cumple $PV^\gamma = cte$, por lo que

$$V_3 = V_1(\frac{P_1}{P_3})^{1/\gamma} = 2,3\text{litros}$$

c) En la expansión isoterma:

$$W_{12} = nRT_1 ln(\frac{V_2}{V_1}) = P_1 V_1 ln4 = 22,2\text{atml}$$

En la compresión isóbara:

$$W_{23} = P\Delta V = -6,8\text{atml}$$

En la compresión adiabática:

$$W_{31} = -C_v \Delta T = -\frac{3}{2} nr\Delta T = -\frac{3}{2}(P_1 V_1 - P_3 V_3) = -10.2\text{atml}$$

Por lo tanto,

$$W_{tot} = W_{12} + W_{23} + W_{31} = 22,2 - 6,8 - 10,2 = 5,2\text{atml}$$

d) La eficiencia se define como el cociente entre el trabajo total realizado en el ciclo y el calor absorbido, es decir $\epsilon = W_{tot}/Q_{abs}$. Como ya hemos calculado W_{tot}, sólo nos falta calcular el calor absorbido en cada una de las tres transformaciones. Durante la expensión isoterma $\Delta U = 0$, por lo que $Q_{12} = W_{12}$. En la compresión isóbara el sistema cede calor, luego no hace falta calcular cuanto. Durante la compresión adiabática el calor intercambiado por el sistema es nulo, luego $Q_{abs} = W_{12}$, con lo que

$$\epsilon = \frac{W_{tot}}{W_{12}} = \frac{5,2}{22,2} = 0,23 = 23\%$$

VIII. Fuerza y campo electrostáticos

69. **Entre dos placas uniformemente cargadas, con densidades de signo contrario, existe un campo electrostático uniforme. Un electrón abandona, partiendo del reposo, la placa cargada negativamente y choca con la positiva, que dista $d = 2$ cm de la anterior, al cabo de $1,5 \times 10^{-8}$ s. Calcular la intensidad del campo electrostático, así como la velocidad cuando llega a la segunda placa.** $(e/m_e = 1,76 \times 10^{11} C/kg)$

Solución: La energía total del electrón debe conservarse

$$E = U + E_c = \frac{1}{2} m_e v^2 + qV$$

Entre las placas existe un campo de sentido contrario al movimiento del electrón, por lo que éste será acelerado por una fuerza $e\mathbf{E}$. Tendremos que, si V_1 y V_2 son los potenciales de las placas negativa y positiva, respectivamente,

$$\frac{1}{2} m_e (v_2^2 - v_1^2) = q(V_1 - V_2)$$

que se transforma en

$$\frac{1}{2} m_e v_2^2 = e(V_1 - V_2)$$

al ser $v_1 = 0$, pues parte del reposo, y $q = -e$

Para calcular la intensidad del campo tenemos en cuenta:

$$F = eE = m_e a \qquad , \qquad a = \frac{e}{m_e} E$$

El electrón se mueve con movimiento uniformemente acelerado, por tanto

$$a = 2d/t^2 = 1,78 \times 10^{14} \text{m s}^{-2}$$

La intensidad del campo será

$$E = a(m_e/e) = 1,01 \times 10^3 \text{N C}^{-1}$$

Para calcular la velocidad final a través de la expresión de la conservación de la energía, necesitamos la diferencia de potencial entre las placas

$$E = -\frac{dV}{dx} \qquad , \qquad (V_1 - V_2) = Ed = 20,2\text{V}$$

Lo que nos permite calcular la velocidad y obtener $v = 26,67 \times 10^5 \text{ms}^{-1}$

70. **El sistema de la figura está formado por un condensador de placas plano-paralelas, cargado con densidad superficial de carga σ, de una de cuyas placas cuelga una esfera conductora con carga Q y masa m. En la posición de equilibrio el hilo del que cuelga la esfera forma un ángulo de 30^o con la vertical. Calcular: a) la tensión del hilo, b) la densidad de carga en cada placa.**

Datos: $m = 10^{-10}$ K; $Q = 10^{-15}$ C; $\epsilon_o = 8,85 \times 10^{-12}\ C^2/Nm^2$.

Solución:

a) En la posición de equilibrio existen tres fuerzas que actúan sobre la esfera: la tensión del hilo, el peso de la esfera y lafuerza de repulsión electrostática, y las tres fuerzas están en equilibrio. Por lo tanto, escribiendo la condición de equilibrio, en la dirección del hilo, y despejando T, obtenemos:

$$T = F_e sen\alpha + mgcos\alpha = \frac{Q\sigma}{\epsilon_o} sen\alpha + mgcos\alpha$$

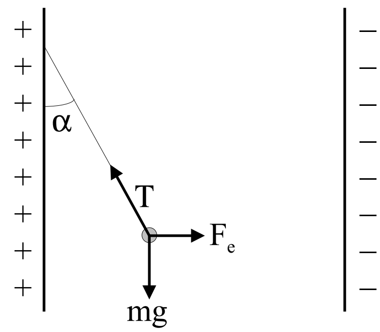

Figura 39: Problema 71.

b) Por otro lado, la condición de equilibrio en la dirección perpendicular al hilo nos da:

$$F_e cos\alpha = mgsen\alpha$$

de donde obtenemos:

$$tg\alpha = \frac{Q\sigma}{mg\epsilon_o}$$

y, por lo tanto,

$$\sigma = \frac{mg\epsilon_o tg\alpha}{Q} = 5,011 \times 10^{-6} C/m^2$$

71. Dos placas metálicas de $100\ cm^2$ de área están separadas 2cm. La carga sobre la placa de la izquierda es $-2 \times 10^{-9}C$ y la carga de la placa de la derecha es $-4 \times 10^{-9}C$. Se pide: a) Calcular el campo inmediatamente a la izquierda de la placa de la izquierda; b) el campo entre las placas; c) el campo inmediatamente a la derecha de la placa de la derecha; d) la diferencia de potencial entre las placas.

Solución:

a) El módulo del campo creado por una distribución plana de carga con densidad de carga σ es $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_o}$ y como a la izquierda de la placa de la izquierda el sentido de los campos creados por ambas placas es idéntico y hacia la derecha tenemos:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_o} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_o} = \frac{q_1 + q_2}{2S\epsilon_o} = 3,39 \times 10^4 V/m$$

b) En este caso los dos campos tienen sentidos opuestos y por lo tanto

$$E_2 = \frac{q_2 - q_1}{2S\epsilon_o} = 1,13 \times 10^4 V/m$$

c) En este caso los dos campos tienen idéntico sentido pero opuesto al del apartado a). Por lo tanto

$$E_3 = \frac{-(q_1 + q_2)}{2S\epsilon_o} = -3,39 \times 10^4 V/m$$

d) Como el campo entre las placas es uniforme, el potencial será:

$$V_2 - V_1 = E_2 d = 226V$$

72. En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno el electrón se mueve en una órbita circular de radio r alrededor del protón fijo. a) Hallar una expresión de la energía cinética del electrón en función de r. Demostrar que a una distancia cualquiera r la energía cinética es la mitad del valor de la energía potencial. b) Calcular los valores de las energías cinética y total del electrón para $r = 0,529 \times 10^{-10}$m ($q_e = 1,602 \times 10^{-19}$ Culombios, $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$Kg.) c) ¿Cuánta energía debe suministrarse al átomo de hidrógeno para ionizarlo, es decir, para llevar el electrón al infinito con energía cinética nula?

Solución:

a) Primeramente escribiremos la condición de estabilidad de la órbita, que es el equilibrio entre fuerza de atracción electrostática y fuerza centrífuga:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

de donde se puede despejar v^2 y sustituir posteriormente en la expresión para la energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_o r}$$

Por otra parte la energía potencial del electrón es:

$$V = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_o r}$$

con lo que se demuestra lo pedido en el apartado a).

b) Para la energía total tenemos:

$$E = E_c + V = E_c - 2E_c = -E_c = -1,07 \times 10^{-18} J$$

mientras que $E_c = 2,14 \times 10^{-18} J$

c) Para ionizar un átomo de hidrógeno es necesario aportar una energía igual a su energía total E, ya que en el infinito su energía potencial es nula y como la cinética también debe serlo, basta con llevarlo a un estado de energía total nula, luego: $E^* = -E = 1,07 \times 10^{-18}$ J.

73. Las placas de un condensador plano tienen un área A y están separadas una distancia d, estableciéndose entre ellas una diferencia de potencial V. a) Si introducimos entre las placas (véase figura) una lámina metálica de espesor x, ¿cuál es la nueva capacidad del condensador? b) ¿Cuál es la nueva diferencia de potencial entre las placas? c) Si $A = 30\ cm^2$, $d = 5$ mm, $V = 1.000$ V, $x = 3$ mm y $\epsilon_o = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m ¿cuáles son los valores numéricos de la capacidad y la diferencia de potencial después de introducir la lámina?

Solución:

a) Supongamos que la carga de las placas del condensador antes de introducir la lámina metálica es q. Al colocar la lámina metálica en esta aparece una carga +q frente a la placa cargada negativamente y una carga -q frente a la placa cargada positivamente. Por lo tanto es como si tuviéramos dos condensadores iguales en serie, cuya capacidad sería:

$$C_1 = C_2 = \frac{q}{V} = \frac{\epsilon_o A}{(d-x)/2}$$

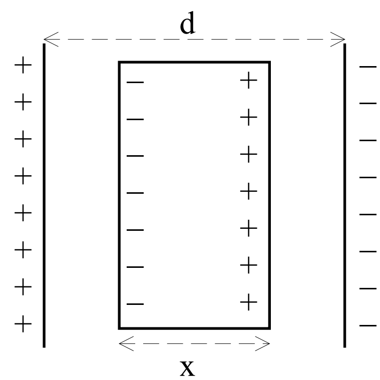

Figura 40: Problema 74.

por lo tanto la capacidad del nuevo condensador será la capacidad equivalente a la combinación en serie de los dos nuevos condensadores:

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{2}{C_1}$$

con lo que

$$C' = \frac{\epsilon_o A}{d - x}$$

b) La nueva diferencia de potencial entre las placas será la suma de las que hay en C_1 y C_2:

$$V' = \frac{2q}{C_1} = \frac{V(d-x)}{d}$$

c) $C' = 3,98 \times 10^{-12}$ Faradios; $V' = 400$ Voltios.

74. **Calcular la capacidad equivalente del circuito de la figura, con $C_1 = C_2 = 2\ \mu$F, y$C_3 = 6\ \mu$F. Si se aplica al conjunto una diferencia de potencial $V_0 = 10$V, calcular: a) la carga de C_1, b) la diferencia de potencial a través de C_1, c) la carga de C_2 y C_3.**

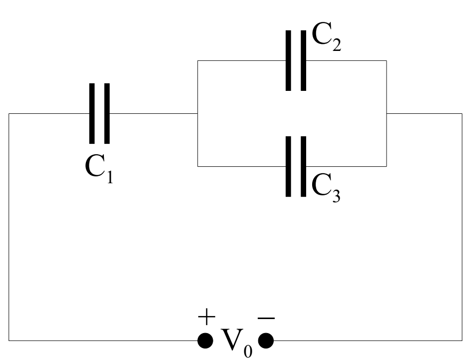

Figura 41: Problema 75.

Solución: Se trata de una asociación de condensadores en la que dos (C_2 y C_3) se encuentran en paralelo y el tercero (C_1) en serie con el condensador equivalente de los dos anteriores. La capacidad de este último será

$$C'_e = C_2 + C_3 = 8\mu F$$

mientras que la capacidad equivalente total

$$C_{e,T} = \frac{C'_e C_1}{C'_e + C_1} = 1,6\ \mu F$$

a) Al aplicar una diferencia de potencial de 10V y una vez los condensadores se han cargado al valor final que pueden adquirir con dicha diferencia de potencial; es decir, cuando el circuito ha adquirido su régimen estacionario:

$$Q_1 = Q'_e,$$

por estar en serie

$$V_0 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q'_e}{C'_e} = Q_1\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C'_e}\right) = Q_1 \frac{C'_e + C - 1}{C_1 C'_e}$$

En la última expresión hemos hecho uso de la descomposición de V_0 en suma de la existente entre los extremos de C_1 y la que hay entre los de C'_e. Sustituyendo los valores numéricos dados: $Q_1 = 16\ \mu$C.

b) La diferencia de potencial a través de C_1 vale:

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = 8\text{V}$$

.

c) La suma de cargas de C_2 y C_3 es igual a 16 μC. Como ambos tienen entre sus placas la misma diferencia de potencial, al estar conectados en paralelo,

$$\left.\begin{array}{l} Q_2 + Q_3 = 16 \\ V = Q_2/C_2 = Q_3/C_3 \end{array}\right\} \quad Q_2 = 4\ \mu C, \quad Q_3 = 12\ \mu C$$

75. **Se elimina del circuito del problema anterior el condensador C_2, quedando solo C_1 y C_3 en serie. Al conjunto de ellos se le aplica una diferencia de potencial $V_0 = 10$V. a) ¿Qué energía se almacena en cada condensador? Supongamos que se desconectan de la fuente V_0 y se vuelven a conectar los condensadores en paralelo, b) ¿qué carga final adquiere cada uno de ellos? c) ¿Qué energía está almacenada, en estas circunstancias, en cada condensador? d) Comparar las respuestas obtenidas en los apartados a) y c) y dar una interpretación, desde un punto de vista físico, de las diferencias que puedan existir.**

Solución: a) Al eliminar del circuito C_2, quedará $Q_1 = Q_3$, y la energía almacenada en cada condensador valdrá

$$U_1 = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} \quad , \quad U_3 = \frac{1}{2}\frac{Q_3^2}{C_3}$$

Para calcular Q_1 o Q_3, determinamos previamente la capacidad equivalente en cada caso:

$$C^*_{equiv} = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} = 1,5\ \mu F$$

$$Q_1 = C^*_{equiv} V_0 = 15\ \mu C$$

Por lo tanto

$$U_1 = 56,25 \times 10^{-6}\text{J} \quad , \quad U_3 = 18,75 \times 10^{-6}\text{J}$$

b) Al desconectarlos de la fuente y conectarlos entre sí en paralelo, lo que hemos hecho estrictamente es unir las placas del mismo signo de cada uno de ellos entre sí, más que conectarlos en paralelo o en serie

(¿por qué?). Al hacer esta nueva conexión, es evidente que la diferencia de potencial entre los extremos de uno es igual a la que existe entre las placas del otro

$$\frac{Q_1^*}{C_1} = \frac{Q_3^*}{C_3} \quad , \quad \frac{Q_1^*}{Q_3^*} = 1/3$$

Además, la carga ha de conservarse respecto de la situación anterior:

$$Q_1^* + Q_3^* = 2Q_1 = 30\ \mu C$$

por lo tanto $Q_1^* = 7,5\mu$C y $Q_3^* = 22,5\ \mu$C.

c) La energía almacenada en cada uno de los condensadores es fácil de calcular con las formulas del apartado a), y viene dada por $U_1^* = 14,06 \times 10^{-6}$ J, $U_3^* = 14,06 \times 10^{-6}$ J.

d) Comparando los resultados de los apartados a) y c), se observa que $U_1 + U_3 > U_1^* + U_3^*$; la energía almacenada por el sistema de condensadores ha disminuido al pasar de una situación a otra. La energía no puede desaparecer, solo se puede transformar de una forma a otra. No es posible que se haya disipado en calor al producirse la redistribución de cargas en los condensadores como consecuencia de la reconexión del apartado b), ya que hemos supuesto implícitamente que no existen elementos resistivos en el circuito. Con esta hipótesis, la única posibilidad es que la diferencia de energías potenciales entre las dos configuraciones se haya transferido en forma de radiación electromagnética al medio que rodea el circuito. En la realidad siempre existen elementos resistivos y, por tanto, una cierta disipación de energía en forma de calor, al producirse el reajuste de carga en los condensadores; pero también existe el mecanismo de radiación para transferir parte de estas diferencias de energía al medio, en forma de onda electromagnética.

76. Dos cargas puntuales de $5\ \mu C$ y $-10\ \mu C$, se encuentran situadas en un plano vertical y separadas una distancia de $1m$. Se pide: a) Calcular el valor del campo eléctrico y su dirección en un punto del plano situado a $0,6m$ de la primera carga y a $0,8m$ de la segunda y por encima de ambas. b) Calcular los puntos en los cuales el campo eléctrico es nulo. c) Encontrar las coordenadas del punto situado en la línea que une las cargas en el cual los campos creados por las dos cargas son idénticos en módulo, dirección y sentido.

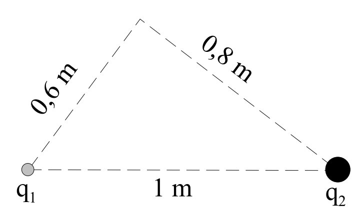

Figura 42: Problema 77.

Solución:

a) Para resolver este primer apartado basta utilizar la expresión del campo eléctrico creado por una carga puntual. Las expresiones se simplifican mucho si se hace uso del hecho de que los puntos donde están situadas las cargas y el punto donde se pide calcular el campo forman un triángulo rectángulo. Si designamos con subíndice 1 a la carga de $5\mu C$ y con subíndice 2 a la carga de $-10\mu C$, las expresiones resultantes para las componentes del campo eléctrico creado por cada una de las cargas son:

$$E_{x1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_1 cos\alpha}{R_1^2} = 7,5 \times 10^4 N/C$$

$$E_{y1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_1 sen\alpha}{R_1^2} = 10^5 N/C$$

$$E_{x2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_2 cos\beta}{R_2^2} = 45/4 \times 10^4 N/C$$

$$E_{y2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_2 sen\beta}{R_2^2} = -27/32 \times 10^5 N/C$$

Donde R_1 y R_2 indican las distancias respectivas de las cargas al punto donde se calcula el campo y α y β los ángulos formados con la horizontal por las rectas que unen a cada carga con el punto.

Utilizando el principio de superposición de campos, las componentes del campo total se calculan como la suma de las componentes de los campos creados por cada carga.

$$E_x = 75/4 \times 10^4 N/C; \quad E_y = 50/32 \times 10^4 N/C$$

Teniendo ya las componentes totales del campo, el módulo del campo y el ángulo que forma el campo con la horizontal se calculan de la manera habitual:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 1,88 \times 10^5 N/C; \quad tg\gamma = \frac{E_y}{E_x} = 1/12$$

b) Para que el campo se anule se tiene que cumplir que los campos creados por la dos cargas sean de igual módulo, igual dirección y sentido contrario. La condición de que tengan la misma dirección tiene como consecuencia que el campo sólo se puede anular en puntos situados sobre la recta que une las dos cargas.

La condición de que los campos tengan igual módulo se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_1}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_2}{(x-1)^2}$$

donde x es la distancia del punto buscado a la carga q_1. Esta relación nos da una ecuación de segundo grado:

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

cuyas soluciones son $x_1 = -2,41m$, y $x_2 = 0,41m$. Para x_1 el punto está situado a la izquierda de q_1, luego los dos campos tendrán sentido contrario y se anularán, luego esta es la respuesta buscada.

Sin embargo, para x_2 el punto está situado entre las dos cargas y los campos tendrán el mismo sentido, con lo que la respuesta a la pregunta c) es $x_2 = 0,41m$.

77. En la figura se proyecta un electrón en la dirección del eje horizontal y con una velocidad inicial de $v = 2 \times 10^7\ ms^{-1}$ entre las placas de un condensador, entre las que hay un campo eléctrico dirigido hacia arriba de intensidad 20.000 N/C. a) Calcular la separación del electrón respecto al eje horizontal a la salida de las placas. b) ¿Qué ángulo formará la velocidad del electrón con la horizontal a la salida de las placas? c) ¿A qué distancia del eje horizontal alcanzará el electrón una pantalla colocada a 12 cm de la salida de las placas?

Solución:

a) El movimiento del electrón entre las placas puede considerarse como un movimiento de tiro parabólico con la velocidad inicial indicada en el enunciado y una aceleración $\vec{a} = -\frac{eE}{m_e}\vec{j}$. Las ecuaciones de dicho movimiento serán, pués:

$$x = vt; \quad y = -\frac{1}{2}at^2$$

resolviendo este sistema para $x = x_o$, donde x_o es la coordenada horizontal del extremo de salida de las placas, se tiene

$$t_o = x_o/v; \quad y_o = -\frac{1}{2}\frac{eE}{m_e}\frac{x_o^2}{v^2} = -0,7cm$$

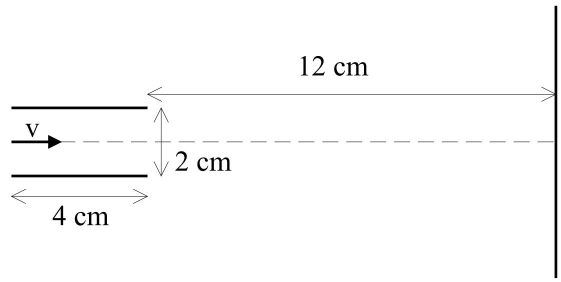

Figura 43: Problema 78.

.

b) Las componentes de la velocidad cumplen las ecuaciones $v_x = v$; $V_y = at$, de donde

$$tan\alpha = \frac{at}{v} = \frac{eE}{m_e}\frac{x_o}{v^2} = 0,35$$

c) A partir de la salida de entre las placas, el movimiento del electrón es uniforme y por lo tanto:

$$x_p = vt'; \quad y_p = -y_o + v_y t'$$

donde X_p es la distancia entre la salida de las placas y la pantalla. Resolviendo el sistema se tiene $t' = x_p/v$, e

$$y_p = -\frac{1}{2}\frac{eE}{m_e}\frac{x_o(x_o + x_p)}{v^2} = -2,8cm$$

.

78. **Cuatro cargas iguales Q se encuentran en los vértices de un cuadrado de lado L. Las cargas se van dejando en libertad una a una siguiendo el sentido de las agujas del reloj y de manera que se permite que cada carga alcance su velocidad final a una gran distancia del cuadrado antes de liberar la siguiente. ¿Cuál será la energía cinética final de (a) la primera carga liberada, (b) la segunda, (c) la tercera y (d) la cuarta?**

Solución:

Como el campo electrostático es conservativo, en el proceso de liberación y alejamiento de cada una de las cargas, la energía total se conserva, por lo que $\Delta E_c = -\Delta E_{pot} = -q\ \Delta V = q(V_i - V_f)$. Además, a una gran distancia tomamos el origen de potencial igual a cero, y como la energía cinética inicial también es nula tenemos finalmente $E_{cf} = qV_i$.

Para calcular V_i basta con sumar los potenciales electrostáticos creados por cada una de las cargas que no se han liberado todavía, de modo que obtenemos:

a)

$$E_{ci} = qV_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_o}(\frac{2q}{L} + \frac{q}{\sqrt{2}L\%}) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_o L}(\frac{4+\sqrt{2}}{2})$$

b)

$$E_{ci} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_o L}(\frac{2+\sqrt{2}}{2})$$

c)

$$E_{ci} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_o L}$$

d) La cuarta carga no se ve sometida a ningún potencial, luego permanecerá en reposo y, por lo tanto, su energía cinética final será nula.

IX. Corriente eléctrica

79. **Un conductor de resistividad ρ tiene la forma indicada en la figura. El radio de la circunferencia exterior es b, el de la interior a y la altura d. Entre ambas circunferencias se aplica una diferencia de potencial V_0. Calcular la corriente que recorre el conductor, resistencia que presenta y el campo existente en el mismo, de forma que el borde interior sea positivo respecto del exterior**

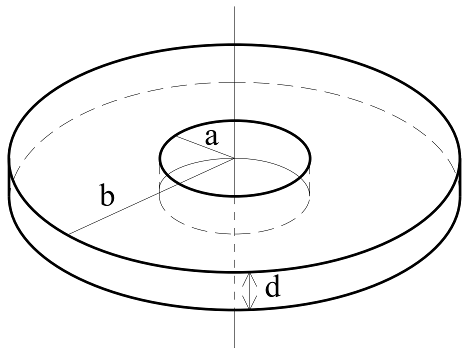

Figura 44: Problema 80.

Solución: Debido a la simetría del conductor y suponiendo que ρ es constante en todo el medio, el valor de la densidad de corriente será el mismo para todos los puntos que disten por igual del eje del conductor: $J(r)$. Su dirección será radial y el sentido desde el borde de la circunferencia interior al de la exterior.

Para calcular la intensidad de corriente elegimos una superficie abierta S_a, puesto que i representa la carga que atraviesa la misma por unidad de tiempo. Sea ésta un cilindro de radio r y de altura d.

$$S_a = 2\pi r d \qquad , \qquad i = \int_{S_a} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = J 2\pi r d$$

ya que J es constante en los puntos de dicha superficie y $\mathbf{J}$ y d$\mathbf{S}$ tienen la misma dirección y sentido.

A partir de la ley de Ohm, tenemos que

$$E = \rho J = \frac{\rho i}{2\pi r d}.$$

Observamos que el campo también presenta una simetría radial: $E(r)$ y que no es constante en el interior del conductor. Además,

$$V_a - V_b = V_0 = \int_a^b E(r) dr,$$

que, una vez sustituido el valor del campo antes encontrado, queda

$$V_0 = \int_a^b \frac{\rho i}{2\pi r d} dr = \frac{\rho i}{2\pi d} \ln \frac{b}{a}$$

$$i = \frac{2\pi d V_0}{\rho} \ln \frac{b}{a}.$$

Teniendo en cuenta la relación de Ohm,

$$R = \frac{\rho}{2\pi d} \ln \frac{b}{a}$$