

# CAPÍTULO 18

## DINÁMICA DE LOS FLUIDOS

*Pasamos ahora de la estática de los fluidos a la dinámica de los fluidos en movimiento. En esencia, existe poca diferencia entre la dinámica del movimiento de los fluidos y la dinámica de los movimientos de la partícula y del cuerpo rígido, que ya hemos estudiado en capítulos anteriores. Empleamos aquí conceptos ya conocidos para analizar la dinámica de los fluidos, incluyendo las leyes de Newton del movimiento y la conservación de la masa y de la energía. Así pues, en este capítulo aplicaremos estos principios a los fluidos, los que describimos empleando variables tales como la presión y la densidad que hemos presentado en el capítulo 17.*

*Comenzaremos con un modelo simplificado del flujo fluido, del cual no tendremos en cuenta las fuerzas de disipación. Este enfoque es similar a nuestro estudio previo de la dinámica de la partícula, donde en un principio no tomábamos en cuenta a las fuerzas de disipación (de fricción). Una ventaja de este acceso es que permite un análisis en términos de la conservación de la energía mecánica, como lo hicimos en el capítulo 8 en el caso de las partículas. Más adelante en el presente capítulo ofreceremos una descripción breve de los resultados interesantes y poco usuales que suceden en los fluidos reales cuando se toman en cuenta las fuerzas de disipación, llamadas fuerzas viscosas.*

---

### 18-1 CONCEPTOS GENERALES DEL FLUJO DE LOS FLUIDOS

---

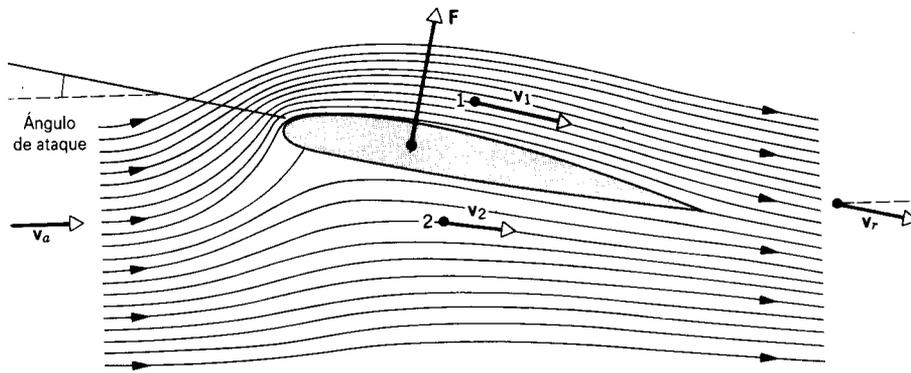
Una manera de describir el movimiento de un fluido consiste en dividirlo en elementos de volumen infinitesimal, a los cuales podemos llamar *partículas fluidas*, y seguir el movimiento de cada partícula. Si conocemos a las fuerzas que actúan sobre cada partícula del fluido, podemos entonces resolver para las coordenadas y velocidades de cada partícula en función del tiempo. Este procedimiento, que es una generalización directa de la mecánica de la partícula, fue desarrollado por primera vez por Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Puesto que el número de partículas de fluido es generalmente muy grande, el uso de este método es una tarea formidable.

Existe otro tratamiento distinto, desarrollado por Leonhard Euler (1707-1783), que es más conveniente en la mayoría de los casos. En él abandonamos el intento de especificar la historia de cada partícula del fluido y, en cambio, especificamos la densidad y la velocidad del fluido en cada punto en el espacio y en cada instante de tiempo. Éste es el método que usaremos. Describiremos al movimiento del fluido especificando la densidad

$\rho(x, y, z, t)$  y la velocidad  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$  en el punto  $x, y, z$  en el tiempo  $t$ . Centraremos entonces nuestra atención en qué está sucediendo en un punto en particular del espacio en ese tiempo determinado, en lugar de ocuparnos de qué le sucede a una partícula dada de fluido. Cualquier cantidad empleada para describir el estado del fluido, por ejemplo, la presión  $p$ , tendrá un valor definido en cada punto en el espacio y en cada instante de tiempo. Si bien, esta descripción del movimiento del fluido centra la atención sobre un punto en el espacio en lugar de sobre una partícula del fluido, no podemos evitar seguir a las partículas del fluido en sí mismas, cuando menos durante intervalos de tiempo cortos  $dt$ . Después de todo, las leyes de la mecánica se aplican a partículas y no a puntos en el espacio.

Consideraremos en primer lugar algunas características generales del flujo de los fluidos.

1. *El flujo de los fluidos puede ser estacionario o no estacionario.* Describamos al flujo en términos de los valores de variables tales como la presión, la densidad, y la velocidad de flujo en cada punto del fluido. Si estas variables son constantes en el tiempo, se dice que el flujo es *estacionario*. Los valores de estas variables cambian por lo general de un punto a otro, pero no cambian con el



**Figura 12** Las líneas de corriente alrededor de un plano aerodinámico o ala de un aeroplano. La velocidad  $v_a$  del aire que se aproxima es horizontal, mientras que el aire que se aleja del plano aerodinámico tiene una velocidad  $v_r$ , con una componente hacia abajo. El plano aerodinámico ha ejercido entonces una fuerza hacia abajo sobre el aire, y según la tercera ley de Newton, el aire debe haber ejercido por tanto una fuerza hacia arriba sobre el plano aerodinámico. Esta fuerza hacia arriba está representada por la fuerza ascensional  $F$ .

sección transversal  $A_0$ . Deseamos hallar la velocidad  $v_0$  a la cual escapa el gas por el orificio.

Escribamos la ecuación de Bernoulli (Ec. 8) así:

$$p - p_0 = \rho g(y_0 - y) + \frac{1}{2}\rho(v_0^2 - v^2),$$

donde  $p_0$  representa a la presión atmosférica justamente afuera del orificio. En un gas la densidad es tan pequeña que podemos despreciar la variación de presión por la altura de la cámara, lo que nos da

$$p - p_0 = \frac{1}{2}\rho(v_0^2 - v^2)$$

o

$$v_0^2 = \frac{2(p - p_0)}{\rho} + v^2, \quad (13)$$

donde  $v$  es la velocidad del gas que fluye dentro de la cámara y  $v_0$  es la velocidad del gas que pasa por el orificio. Si bien un gas es compresible y el flujo puede volverse turbulento, podemos considerar al flujo como estacionario e incompresible para presiones y velocidades de salida que no sean demasiado grandes.

Supongamos ahora una continuidad en el flujo de masa (en el motor de un cohete esto se consigue cuando la masa del gas que escapa es igual a la masa del gas que se origina al quemar el combustible), de modo que (para una densidad supuesta constante)

$$Av = A_0v_0.$$

Si el orificio es muy pequeño de modo que  $A_0 \ll A$ , entonces  $v_0 \gg v$ , y podemos despreciar a  $v^2$  en comparación con  $v_0^2$  en la ecuación 13. De aquí que la velocidad de escape sea

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(p - p_0)}{\rho}}. \quad (14)$$

Si nuestra cámara es la cámara de escape de un cohete, el empuje sobre el cohete (sección 9-8) es  $v_0 dM/dt$ . Pero la masa del gas que fluye hacia afuera en el tiempo  $dt$  es  $dM = \rho A_0 v_0 dt$ , de modo que

$$v_0 \frac{dM}{dt} = v_0 \rho A_0 v_0 = \rho A_0 v_0^2,$$

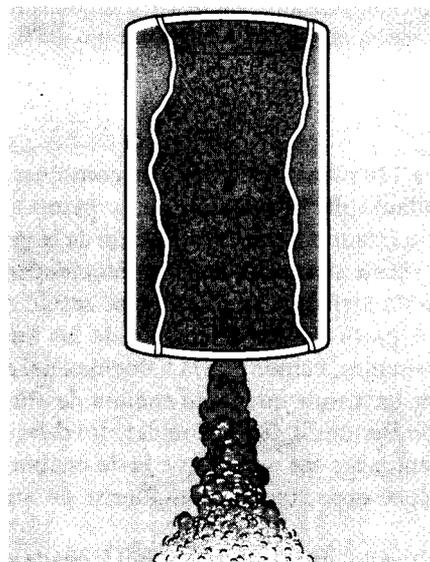
y al usar la ecuación 14 el empuje es

$$v_0 \frac{dM}{dt} = 2A_0(p - p_0). \quad (15)$$

### 18-5 CAMPOS DE FLUJO (Opcional)

En la sección 16-7 vimos cómo representar la situación en las proximidades de las masas al usar un campo gravitatorio. Cada punto del campo puede considerarse como si tuviera un vector asociado con él, digamos,  $\mathbf{g}$ , la fuerza gravitatoria por unidad de masa en ese punto. Podemos llevar a cabo una representación gráfica del campo trazando líneas en dirección del campo cuyo espaciamiento sea proporcional a la intensidad del campo. Emplearemos un enfoque similar cuando estudiemos el campo eléctrico en el capítulo 28.

Del mismo modo, en la dinámica de los fluidos podemos resumir la situación dentro de un fluido en movimiento por medio de un campo de flujo. En general, el campo de flujo es un campo *vectorial*. Asociamos una cantidad vectorial a cada



**Figura 13** Corriente de fluido que se sale de una cámara, que podría representar a la cámara de escape de un cohete.



**Figura 14** Líneas de corriente (líneas horizontales) en un campo de flujo no viscoso, homogéneo.

punto en el espacio, es decir, la velocidad de flujo  $v$  en ese punto. En un flujo estacionario el campo de flujo es estacionario. Por supuesto, aun en este caso, determinada partícula de fluido en particular puede incluso tener una velocidad variable al moverse de punto a punto del campo. El campo ofrece algunas de las propiedades del flujo, y podemos usarlo para deducir el comportamiento de las partículas en movimiento.\*

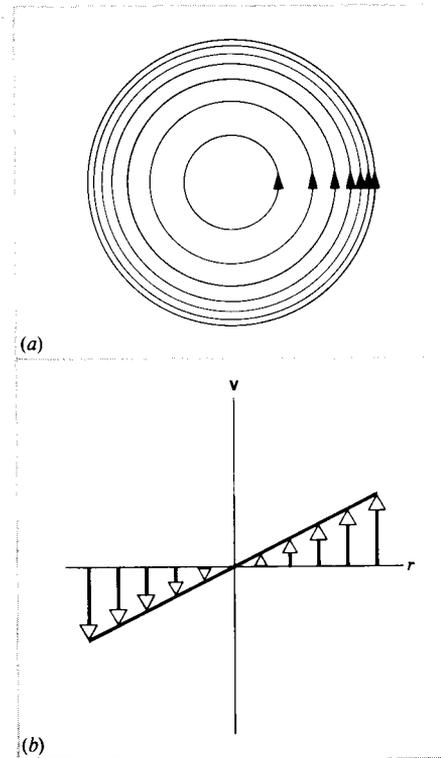
Una masa de fluido puede siempre, al fluir, dividirse en tubos de flujo. Cuando el flujo es estacionario, los tubos permanecen sin cambiar de forma, y el fluido que ya está en un tubo permanece a partir de entonces adentro del mismo tubo. Hemos visto que la velocidad del flujo dentro de un tubo de flujo es paralela al tubo y tiene una magnitud inversamente proporcional al área de la sección transversal (Ec. 2). Asignemos secciones transversales a los tubos de modo que la constante de proporcionalidad sea la misma para todos ellos; de ser posible tomaremos a esta constante como la unidad. Es decir, el flujo volumétrico es el mismo para todos los tubos, es decir, un flujo unitario. Entonces la magnitud de la velocidad de flujo puede ser determinada a partir de las áreas de las secciones transversales de los tubos de flujo. Existe otro procedimiento equivalente a éste que consiste en colocar un área unitaria perpendicular a la dirección de flujo y trazar a través de él tantas líneas de corriente como el número de unidades de magnitud de la velocidad en ese punto.

Consideremos algunos ejemplos de campos de flujo. Para propósitos de trazo tomaremos en cuenta únicamente dos ejemplos bidimensionales. En ellos, la velocidad de flujo es la misma en todos los puntos de una línea perpendicular al plano en cualquier punto.

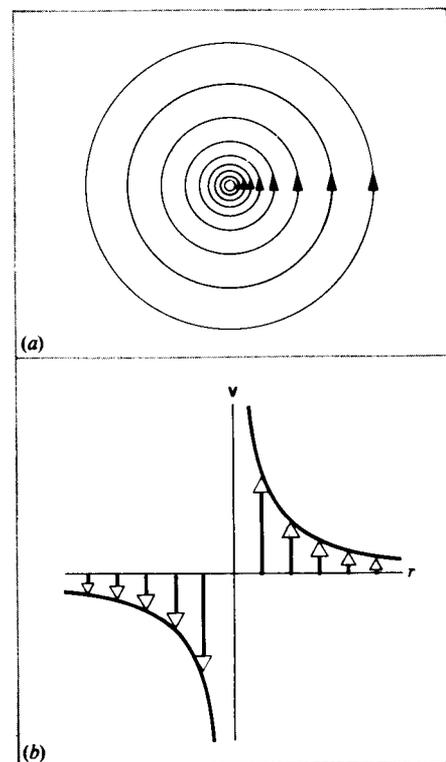
En la figura 14 hemos trazado un *campo de flujo homogéneo*, igual que el que podría existir en el flujo estacionario, no viscoso de un líquido por un tubo con paredes interiores lisas. Aquí todas las líneas de corriente son paralelas, y la velocidad de flujo  $v$  es la misma en todos los puntos.

En la figura 15 mostramos un campo de *flujo rotatorio uniforme*, tal como el que se produciría haciendo girar a una cubeta de agua sobre una mesa giratoria (véase el problema 29, capítulo 17). Aquí  $v$  es proporcional a  $r$ , porque la velocidad angular  $\omega$  es constante. En la figura 16 trazamos el campo de flujo de un *torbellino* (o remolino), tal como el que podría obtenerse al destapar una bañera llena de agua. En este caso  $v$  es proporcional a  $1/r$ , porque el ímpetu angular  $L = mvr$  es

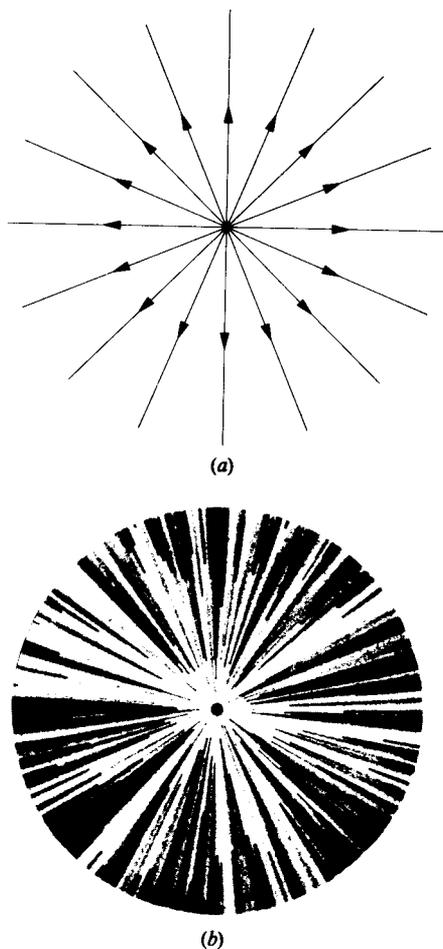
\* Si el flujo es no rotatorio al mismo tiempo que estacionario, lo denominamos *flujo potencial*. Entonces, la velocidad de flujo  $v$  puede ser relacionada con un potencial de velocidad  $\psi$ , del mismo modo que, en la gravitación,  $g$  puede ser relacionada con el potencial gravitatorio  $V$  (véase la sección 16-7). De aquí que un campo vectorial para el flujo potencial sea análogo a un campo de una fuerza conservativa.



**Figura 15** (a) Campo de flujo rotatorio uniforme. (b) Variación de la velocidad del fluido a partir del centro.



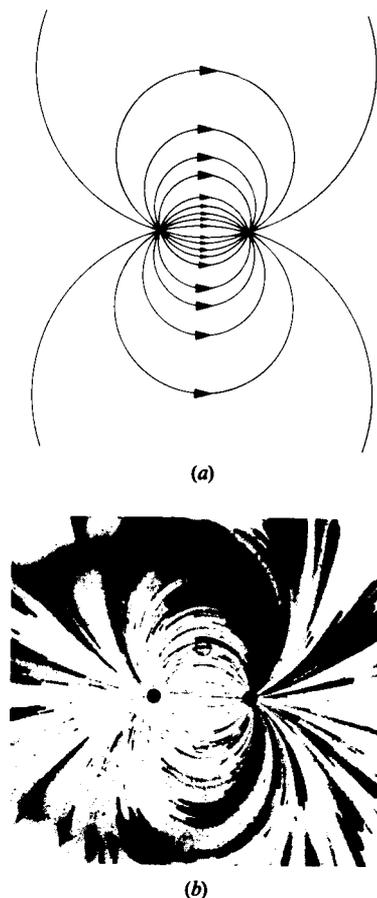
**Figura 16** (a) Campo de flujo de un torbellino. (b) Variación de la velocidad del fluido a partir del centro.



**Figura 17** (a) Flujo de una fuente lineal. (b) Mapa del flujo del fluido a partir de una fuente lineal. El mapa se forma permitiendo que el agua fluya entre una capa horizontal de vidrio laminado y una capa horizontal de yeso. El agua pasa por un orificio en el centro y sale fluyendo hacia los bordes. La dirección del flujo se hace visible rociando al yeso con cristales de permanganato de potasio, el cual se disuelve en el agua y la tiñe de color púrpura. El mapa del flujo del fluido fue elaborado y fotografiado por el profesor A. D. Moore en la Universidad de Michigan y está tomado de *Introduction to Electric Fields*, por W. E. Rogers (McGraw-Hill, 1954).

constante, y el flujo es no rotatorio (véase el problema 36). Nótese que tanto la rotación uniforme como el movimiento de un torbellino se representan con líneas de corriente circulares pero son clases de flujo por completo diferentes. Obviamente, las formas de las líneas de la corriente dan sólo una información limitada; es necesario conocer también su espaciamiento.

La figura 17 representa el campo de flujo de una fuente. Todas las líneas de corriente se dirigen hacia afuera en forma radial. La fuente es una línea que pasa por el centro perpendicular al papel. La intensidad de una fuente se especifica dando la masa por la unidad de tiempo de emisión. El campo de flujo alrededor de un sumidero lineal es el mismo que el de una fuente excepto por el signo del flujo, que se dirige radialmente hacia adentro.



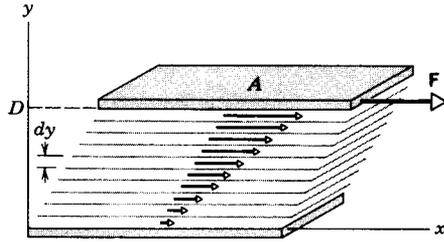
**Figura 18** (a) Flujo bipolar lineal, cuya fuente se halla a la izquierda; el sumidero está a la derecha. (b) Mapa del flujo del fluido en un bipolo lineal, construido como se describe para la figura 17.

En una fuente lineal y en un sumidero lineal que tengan las mismas fuerzas y estén ligeramente separados, obtenemos el campo combinado llamado flujo bipolar lineal, que se muestra en la figura 18.

Según veremos más adelante, el campo electrostático, el campo magnético, y el campo de flujo de una corriente eléctrica son también campos vectoriales. En este aspecto, el campo homogéneo (Fig. 14) corresponde al campo eléctrico de un condensador (o capacitor) plano, el campo de la fuente o el campo del sumidero (Fig. 17) corresponden al campo eléctrico de un condensador cilíndrico o a un alambre recto de carga positiva o negativa, respectivamente, y el campo bipolar lineal (Fig. 18) corresponde al campo eléctrico de dos alambres opuestamente cargados. En todos ellos el campo de flujo es un flujo potencial, y los campos eléctricos son conservativos.

El campo homogéneo de la figura 14 representa también al campo magnético dentro de un solenoide. El campo vertiginoso de la figura 16 representa al campo magnético alrededor de un alambre recto portador de corriente. Este último es un ejemplo de campo que es rotatorio (respecto al eje del vertiginoso).

A causa de estas analogías entre el campo fluido y el electromagnético, a menudo podemos determinar un campo de flujo difícil de calcular por los métodos matemáticos actuales, por



**Figura 19** Un fluido viscoso llena el espacio entre dos placas planas separadas por una distancia  $D$ . La placa inferior está en reposo y la placa superior se mueve hacia la derecha con una fuerza constante  $F$ . La velocidad de cada capa de fluido disminuye uniformemente desde la placa superior hasta la placa inferior.

medio de mediciones experimentales en aparatos eléctricos apropiados.

Como hemos visto a lo largo de este capítulo, las ideas básicas del campo y los principios de conservación hallan aplicación en muchas áreas de la física, y nos encontraremos con ellos muchas veces más todavía. ■

## 18-6 VISCOSIDAD, TURBULENCIA, Y FLUJO CAÓTICO (Opcional)

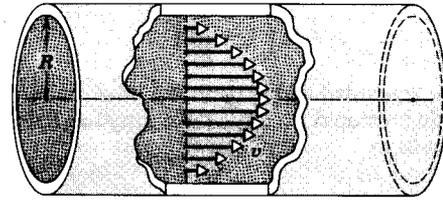
La viscosidad en el flujo de los fluidos es similar a la fricción en el movimiento de los cuerpos sólidos. Al deslizar a un cuerpo sólido sobre otro, debemos proporcionar una fuerza externa  $F$  que se oponga a la fuerza de rozamiento  $f$  si queremos mantener al cuerpo en movimiento a velocidad constante. En el caso del movimiento de los fluidos podemos considerar a un fluido entre dos placas paralelas, como se ilustra en la figura 19. Una fuerza  $F$  está aplicada a la placa superior, de modo que esté en movimiento a velocidad constante  $v$  respecto a la placa inferior, la cual suponemos está en reposo. La fuerza  $F$  se opone al arrastre viscoso de la placa superior para mantener constante su velocidad.

Podemos imaginar que el fluido está dividido en capas paralelas a las placas. La viscosidad actúa no solamente entre el fluido y la placa superior, sino entre cada capa de fluido y sobre las capas adyacentes. La velocidad de cada capa difiere en una

**TABLA 1** VISCOSIDAD DE UNA SELECCIÓN DE FLUIDOS

Fluido	$\eta$ ( $N \cdot s/m^2$ )
Glicerina (20° C)	1.5
Aceite para motores† (0° C)	0.11
Aceite para motores† (20° C)	0.03
Sangre (37° C)	$4.0 \times 10^{-3}$
Agua (20° C)	$1.0 \times 10^{-3}$
Agua (90° C)	$0.32 \times 10^{-3}$
Gasolina (20° C)	$2.9 \times 10^{-4}$
Aire (20° C)	$1.8 \times 10^{-5}$
CO <sub>2</sub> (20° C)	$1.5 \times 10^{-5}$

† Peso medio (S.A.E. 30).



**Figura 20** El fluido fluye por un tubo cilíndrico de radio  $R$ . Se muestra la variación en la velocidad desde la pared hasta el centro.

cantidad  $dv$  de la velocidad de la que está bajo ella. El flujo del fluido en el que la velocidad varía capa a capa se denomina flujo *estacionario*. En esta exposición, suponemos que la capa de fluido más alta tiene la misma velocidad  $v$  que la placa de arriba y que la capa de fluido del fondo tiene la misma velocidad que la placa del fondo, es decir, cero.

Por analogía con el esfuerzo cortante aplicado a los sólidos (Sec. 14-5), podemos definir que el esfuerzo cortante sobre el fluido es  $F/A$ , donde  $A$  es el área de la capa de fluido. Un sólido puede responder a este esfuerzo cortante con un cambio en su forma (la deformación al corte, la cual es un desplazamiento lateral a través de cada capa), pero un fluido responde mediante el movimiento, o sea, mediante un cambio de velocidad  $dv$  a través de cada capa de espesor  $dy$ . La razón entre el esfuerzo y la deformación en el fluido se llama *coeficiente de viscosidad*  $\eta$  (letra griega eta) del fluido:

$$\eta = \frac{F/A}{dv/dy} \quad (16)$$

Según nuestra hipótesis de que la capa superior se mueve a velocidad  $v$  y que la capa del fondo lo hace a  $v = 0$ , el *gradiente de velocidad*  $dv/dy$  es simplemente  $v/D$ , donde  $D$  es el espaciamiento entre las dos placas. Así,

$$\eta = \frac{F/A}{v/D} = \frac{FD}{vA} \quad (17)$$

La unidad SI de la viscosidad es el  $N \cdot s/m^2$ . La unidad cegesimal equivalente es la  $dina \cdot s/cm^2$ , llamada *poise*. (La unidad recibe el nombre en memoria del fisiólogo francés Jean-Louis-Marie Poiseuille, quien fue el primero en investigar el flujo de los fluidos viscosos por de tubos, como una ayuda para entender la circulación de la sangre.) Al comparar estas unidades vemos que  $1 \text{ poise} = 0.1 \text{ N} \cdot s/m^2$ . La tabla 1 muestra algunos valores típicos de la viscosidad de los fluidos.

Una aplicación práctica de la viscosidad tiene lugar en el flujo de fluidos en tuberías cilíndricas. El flujo es de nuevo estacionario, pero en este caso las capas del fluido son cilindros de paredes delgadas de radios diversos. La velocidad del flujo varía con el radio; su valor máximo se da en el eje y su valor mínimo, que suponemos es cero, en las paredes (Fig. 20). Nótese que el flujo ilustrado en la figura 20 es rotatorio, aunque los elementos del fluido viajen en línea recta. Si colocásemos una pequeña rueda de paletas en cualquier parte del flujo, excepto a lo largo de la línea de corriente central, se pondría a girar debido a la variación en la velocidad de las partículas fluidas que inciden en sus paletas.

En el caso de un tubo cilíndrico, como se muestra en la figura 20, la variación de la velocidad con la posición a lo largo del tubo no es lineal. Suponiendo, una vez más, que la capa cercana a las paredes esté en reposo, puede demostrarse que la velocidad en el cuerpo cilíndrico de radio  $r$  es (véase el problema 41)

$$v = v_0 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (18)$$

donde  $v_0$  es la velocidad en el centro del tubo. En términos de la diferencia de presión  $\Delta p$  a largo de la longitud  $L$  del tubo, la velocidad central es

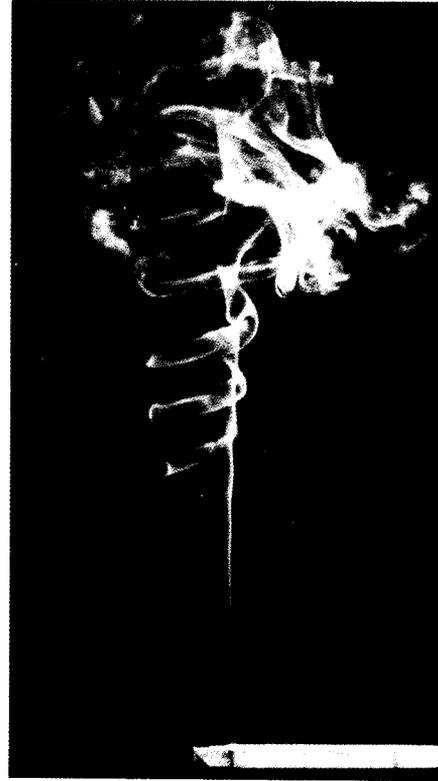
$$v_0 = \frac{\Delta p R^2}{4\eta L}. \quad (19)$$

Al considerar el flujo en cada cuerpo cilíndrico delgado, podemos demostrar (véase el problema 42) que el flujo de masa total  $dm/dt$  (la masa del fluido que fluye por el tubo por unidad de tiempo) es

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\rho \pi R^4 \Delta p}{8\eta L}. \quad (20)$$

Este resultado se conoce como la *ley de Poiseuille*. Conociendo el coeficiente de viscosidad del fluido, podemos entonces determinar la diferencia de presión que debe proveer un agente externo (una bomba, quizás) para mantener determinado flujo de masa en el tubo. En forma equivalente, si forzamos al fluido a lo largo de un tubo con una diferencia de presión conocida, la medición del flujo de masa nos permite determinar el coeficiente de viscosidad del fluido.

La viscosidad en los líquidos se origina por las fuerzas de cohesión intermoleculares. Al aumentar la temperatura, el coeficiente de viscosidad de un líquido disminuye, porque la energía cinética creciente de las moléculas debilita el efecto de las fuerzas intermoleculares. Al contrario, en los gases la viscosidad aumenta con el aumento de la temperatura, porque las propias moléculas pueden desplazarse entre las capas. A temperaturas más elevadas, existe más movimiento molecular y por lo tanto más mezclado. Sin embargo, nótese que en un tubo existen siempre más moléculas lentas cerca de las paredes que moléculas rápidas cerca del eje central, de modo que mayor mezcla significa siempre más moléculas lentas que se mueven hacia el eje e impiden el movimiento de las moléculas que se mueven más rápidamente. (El efecto es parecido al del tráfico lento cuando se mezcla en el carril rápido de una carretera.)



**Figura 21** El humo que asciende tiene primeramente un flujo estacionario, pero no tarda en convertirse en turbulento.

Los aceites pesados tienen típicamente viscosidades dentro de este margen.

**Problema muestra 3** Por un tubo de sección transversal circular se bombea aceite de castor, el cual tiene una densidad de  $0.96 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  a la temperatura ambiente, por medio de una bomba que mantiene una presión de medición de 950 Pa. El tubo tiene un diámetro de 2.6 cm y una longitud de 65 cm. El aceite de castor que sale por el extremo libre del tubo a la presión atmosférica se junta en un recipiente. Después de 90 s, se ha juntado un total de 1.23 kg. ¿Cuál es el coeficiente de viscosidad del aceite de castor a esta temperatura?

**Solución** El flujo de masa es

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1.23 \text{ kg}}{90 \text{ s}} = 0.0137 \text{ kg/s}.$$

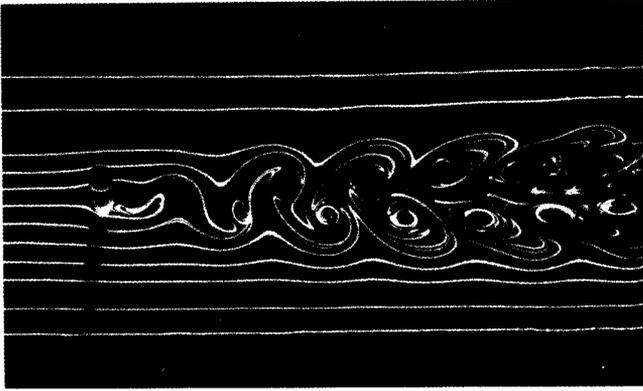
El coeficiente de viscosidad puede obtenerse ahora directamente de la ecuación 20 si resolvemos primero para  $\eta$ , que nos da

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\rho \pi R^4 \Delta p}{8(dm/dt)L} = \frac{(0.96 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)\pi(0.013 \text{ m})^4(950 \text{ Pa})}{8(0.0137 \text{ kg/s})(0.65 \text{ m})} \\ &= 1.15 \text{ N}\cdot\text{s/m}^2. \end{aligned}$$

## Turbulencia

Después de elevarse a corta distancia, la columna suave de humo de un cigarrillo se fragmenta en un patrón irregular y en apariencia caprichoso (Fig. 21). De modo similar, una corriente de fluido que pase a través de un obstáculo se rompe en remolinos y torbellinos (Fig. 22), que dan al flujo componentes de velocidad irregulares transversales a la dirección del flujo. Un ejemplo de este caso es el ondear de una bandera al viento: si el flujo de aire fuese estacionario, la bandera ocuparía una posición fija a lo largo de las líneas de corriente, pero el asta rompe el flujo en un patrón irregular parecido al de la figura 22, que da origen al movimiento de aleteo transversal de la bandera. Éstos son ejemplos de un flujo *turbulento* del fluido. Otros ejemplos incluyen las estelas dejadas en el agua por el movimiento de los buques y en el aire por el movimiento de los automóviles y de los aeroplanos. Los sonidos producidos por el silbido y por los instrumentos de viento son consecuencia del flujo turbulento del aire.

En un fluido viscoso, el flujo a baja velocidad puede describirse como estacionario, lo cual sugiere que las capas se deslizan suavemente una sobre otra. Cuando la velocidad del flujo es suficientemente grande, el movimiento se vuelve desordenado e irregular; esto es el flujo turbulento. Una analogía de la mecánica es un bloque empujado a lo largo de una superficie



**Figura 22** El fluido que corre de izquierda a derecha luego de pasar un obstáculo cilíndrico claramente sufre un cambio de estacionario a turbulento. Nótese los remolinos y torbellinos que se forman corriente abajo a partir del obstáculo.

rugosa. Si la fuerza de fricción es pequeña, el bloque se deslizará por la superficie si la fuerza aplicada  $F$  es por lo menos tan grande como la fuerza de fricción  $f$ . Si la fuerza de fricción fuese mayor, la fuerza aplicada  $F$  deberá también ser mayor, llegando a ser al final lo suficientemente grande como para volcar el bloque. La volcadura del bloque es la analogía de la transición del flujo estacionario al flujo turbulento.

Podemos determinar la velocidad crítica a la cual el flujo se convierte en turbulento por medio de un análisis dimensional. Hagamos que  $v_c$  represente la velocidad crítica, la cual consideramos que sea un promedio en el tubo porque, como lo sugiere la figura 20, la velocidad varía en la sección transversal del tubo. Esperamos que esta velocidad crítica dependa de la viscosidad  $\eta$  y de la densidad  $\rho$  del fluido y del diámetro  $D$  del tubo. Usando nuestra técnica usual de análisis dimensional, procedemos como sigue:

$$v_c \propto \eta^a \rho^b D^c$$

$$[v_c] = [\eta^a][\rho^b][D^c]$$

$$L T^{-1} = (M L^{-1} T^{-1})^a (M L^{-3})^b (L)^c,$$

donde las dimensiones de la viscosidad han sido obtenidas a partir de sus unidades de  $N \cdot s/m^2$ . Resolviendo, obtenemos

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = -1.$$

Entonces, la velocidad crítica puede escribirse:

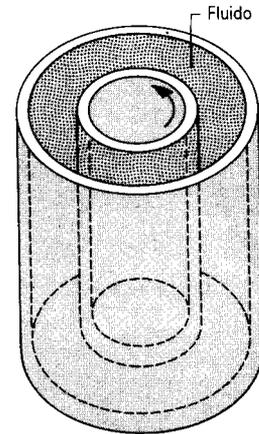
$$v_c \propto \frac{\eta}{\rho D},$$

o, introduciendo una constante de proporcionalidad  $R$ ,

$$v_c = R \frac{\eta}{\rho D}. \quad (21)$$

La constante sin dimensión  $R$  se denomina *número de Reynolds*. Resolviendo la ecuación 21 para  $R$ , podemos escribir el número de Reynolds para *cualquier* velocidad del flujo  $v$  como:

$$R = \frac{\rho D v}{\eta}. \quad (22)$$



**Figura 23** Aparato experimental para medir la viscosidad de los fluidos. El fluido se coloca entre los dos cilindros, estando fijo el cilindro exterior y girando el cilindro interior a una velocidad angular  $\omega$ . La torca necesaria para hacer girar al cilindro interior a esta velocidad angular está determinada por la viscosidad del fluido.

En esta interpretación, el número de Reynolds puede utilizarse para caracterizar a *cualquier* flujo, y podemos determinar por experimentación el valor del número de Reynolds para el cual el flujo se convierte en turbulento.

En tubos cilíndricos, el número de Reynolds que corresponden a la velocidad crítica es de alrededor de 2000. Así, para el agua que fluya por una tubería de 2 cm de diámetro (la típica manguera de jardín casera, por ejemplo), la velocidad crítica es

$$v_c = 2000 \frac{1 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2}{(10^3 \text{ kg}/\text{m}^3)(0.02 \text{ m})} = 0.1 \text{ m/s} = 10 \text{ cm/s}.$$

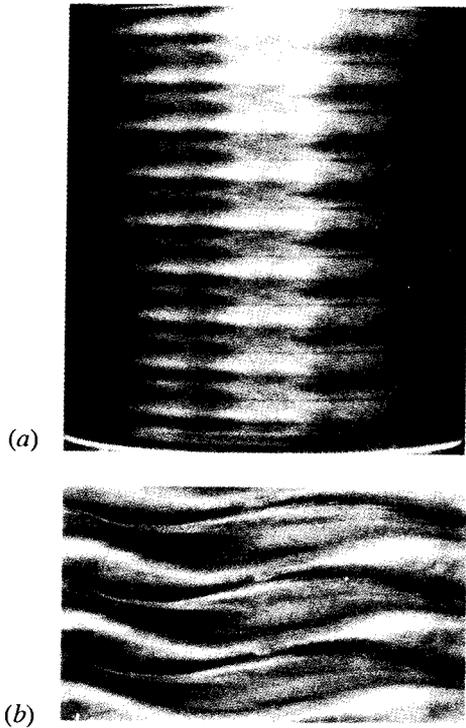
Ésta es una velocidad bastante baja, lo cual sugiere que el flujo del agua es turbulento en una tubería doméstica ordinaria. (La velocidad de flujo de un grifo doméstico típico es de alrededor de 1 m/s.)

Nótese de la ecuación 21 que la velocidad de flujo crítica aumenta con la viscosidad. Esto es, cuanto más grande sea el rozamiento viscoso ejercido por el fluido circundante, con más probabilidad el flujo será estacionario.

### Flujo caótico

La geometría de la figura 19 no es particularmente conveniente para medir la viscosidad. La figura 23 muestra un dispositivo más conveniente. El espacio entre cilindros coaxiales está lleno con el fluido cuya viscosidad está por determinarse. Se hace que el cilindro interior gire, mientras se mantiene fijo al cilindro exterior. Puede determinarse la viscosidad del fluido a partir de la fuerza necesaria para mantener girando al cilindro interior a una velocidad constante.

Para velocidades rotatorias pequeñas, el flujo en la figura 23 será estacionario y laminar. Al aumentar la velocidad rotatoria del cilindro interior, el flujo acaba por ser turbulento. Podemos observar que la transición de flujo estacionario a flujo turbulento se lleva a cabo de manera ordenada. La figura 24 muestra dos etapas intermedias. Primeramente el fluido forma torbellinos toroidales (un poco similar a un montón de donas apiladas) y



**Figura 24** Cuando la velocidad del fluido en el aparato de la figura 23 excede a la velocidad crítica, el flujo se vuelve inestable y se rompe en (a) torbellinos toroidales y luego en (b) ondas sobreimpuestas a los torbellinos.

luego se manifiesta con un patrón de ondas de frecuencia definida que se superpone a los torbellinos. Al continuar cre-

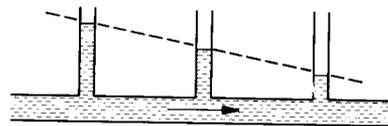
ciendo la velocidad de rotación, aparecen ondas con nuevas frecuencias. Podemos imaginar que el flujo turbulento es la ampliación de este movimiento que incluye tantas componentes de frecuencia que parece que el movimiento se vuelve completamente desordenado y confuso (algo así como el ruido electrónico). Puede existir una estructura periódica subyacente, pero es demasiado compleja para seguirla.

La teoría del caos (véase la Secc. 6-9) adquiere un enfoque diferente para explicar el surgimiento de la turbulencia. El movimiento turbulento que resulta de la teoría del caos es verdaderamente *aperiódico*, no simplemente la combinación de un gran número de movimientos periódicos. Existe una distinción crítica entre estos dos casos. Si la transición de flujo estacionario a flujo turbulento tiene lugar por medio de una sucesión de movimientos periódicos ordenados, entonces dos partículas de fluido que se muevan en forma parecida en el flujo estacionario permanecerán en estados de movimiento relacionados íntimamente durante la transición al flujo turbulento. Sin embargo, si la condición intermedia puede describirse como caótica, entonces el movimiento deja de ser susceptible de predicción y las dos partículas pueden hallarse en el flujo turbulento en estados de movimiento muy diferentes. La teoría del caos, aplicable a una amplia variedad de sistemas físicos, proporciona una base teórica alterna para entender sistemas complejos como el movimiento turbulento de los fluidos. ■

## PREGUNTAS

1. Describa brevemente lo que significa cada uno de los conceptos siguientes e ilústrellos con un ejemplo: (a) flujo de fluido estacionario; (b) flujo de fluido no estacionario; (c) flujo de fluido rotatorio; (d) flujo de fluido no rotatorio; (e) flujo de fluido compresible; (f) flujo de fluido incompresible; (g) flujo de fluido viscoso; (h) flujo de fluido no viscoso.
2. Explique las variaciones de presión de la sangre al circular por el organismo.
3. Explique cómo mide un médico la presión sanguínea.
4. En el flujo estacionario, el vector de la velocidad es constante en cualquier punto. ¿Puede existir entonces un movimiento acelerado de las partículas del fluido? Explique.
5. Describa las fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido al correr por una tubería de sección transversal no uniforme.
6. En una demostración en el aula, una pelota de ping pong se mantiene en el aire por medio de un chorro vertical de aire. ¿Es el equilibrio estable, inestable, o neutro? Explique.
7. La altura del líquido en los tubos derechos de la figura 25 indica que la presión disminuye a lo largo del conducto,

aun cuando éste tenga una sección transversal uniforme y el líquido que fluye sea incompresible. Explique.



**Figura 25** Pregunta 7.

8. Explique por qué una chimenea más alta crea un mejor tiro para extraer el humo fuera del hogar. ¿Por qué no se extiende el humo en el recinto en que se halla el fuego?
9. (a) Explique cómo puede hacer un lanzador de béisbol que la bola se curve a su derecha o a su izquierda. ¿Podemos justificarlo aplicando la ecuación de Bernoulli a una bola que gire así? (Véase "Bernoulli and Newton in Fluid Mechanics", por Norman F. Smith, *The Physics Teacher*, noviembre de 1972, pág. 451.) (b) ¿Por qué es más fácil

- lograr una curva con una pelota de tenis que con una bola de béisbol?
10. No solamente puede hacerse que una bola de superficie rugosa se curve al lanzarla sino también una bola lisa, pero estas bolas se curvarán en direcciones *opuestas*. ¿Por qué? (Véase "Effect of Spin and Speed on the Curve of a Baseball and the Magnus Effect for Smooth Spheres", por Lyman J. Briggs, *American Journal of Physics*, noviembre de 1959, pág. 589.)
  11. Dos lanchas de remos que se mueven paralelamente entre sí y en la misma dirección son arrastradas una hacia la otra. Dos automóviles que se muevan paralelamente también son arrastrados entre sí. Explique tal fenómeno con base en la ecuación de Bernoulli.
  12. Al construir los "rascacielos", ¿qué fuerzas producidas por el movimiento del aire deben ser contrarrestadas? ¿Cómo se hace esto? (Véase "The Wind Bracing of Buildings", por Carl W. Condit, *Scientific American*, febrero de 1974, pág. 92.)
  13. Explique, mediante la ecuación de Bernoulli, la acción de un paracaídas para retardar la caída libre.
  14. ¿Por qué se vuelve más angosta la corriente de agua al salir por un grifo?
  15. ¿Puede usted explicar por qué el agua fluye en corriente continua cuando corre por un tubo vertical hacia abajo, mientras que se divide en gotas al caer libremente?
  16. ¿Cómo trabaja la descarga de un excusado? En la realidad. (Véase *Flushed with Pride: The Story of Thomas Crapper*, por W. Reyburn, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.)
  17. A veces, es posible sacar una carta del sobre cortando una tira delgada del lado estrecho, sujetándolo firmemente, y soplando hacia él. Explique, empleando la ecuación de Bernoulli, por qué tiene éxito este procedimiento.
  18. ¿Sería mejor que un aeroplano al despegar se moviese contra el viento o con el viento? ¿Y al aterrizar?
  19. Explique cómo depende la diferencia de presión entre las superficies baja y alta del ala de un aeroplano de la altitud del plano que se mueve.
  20. La acumulación de hielo en el ala de un aeroplano puede reducir significativamente su fuerza ascensional. Explique. (El peso del hielo no es lo que aquí importa.)
  21. ¿Cómo es que un aeroplano puede volar "panza" arriba?
  22. "La forma de plátano característica de la mayoría de los bumerangs no tiene mucho que ver con su capacidad de retorno... La cuestión esencial consiste en la sección transversal de los brazos, la cual debe ser más convexa en un lado que en el otro, como en el perfil del ala de un aeroplano. (De "The Aerodynamics of Boomerangs", por Felix Hess, *Scientific American*, noviembre de 1968, pág. 124.) Explique.
  23. ¿Cómo se impulsan los pájaros para remontar el vuelo? (Véase "The Soaring Flight of Birds", por C. D. Cone, Jr., *Scientific American*, abril de 1962, pág. 130.)
  24. ¿Por qué aparece el factor "2" en lugar del factor "1"? Uno podría ingenuamente esperar que el empuje fuera simplemente la diferencia de presión multiplicada por el área, esto es,  $A_0(p - p_0)$ .

25. Explique por qué el efecto destructivo de un tornado es mayor cerca del centro de la perturbación que cerca del borde.
26. Cuando se retira el tapón de una tina llena, el agua se cuele por el orificio mientras forma un pequeño remolino. La velocidad angular de un elemento de fluido en torno a un eje vertical que pase por el orificio parece ser más grande cerca del orificio. Explique.
27. ¿Es verdad que en las bañeras situadas en el hemisferio norte el agua se drena con una rotación en sentido antihorario y en las del hemisferio sur lo hacen en sentido horario? De ser así, explique y prediga lo que pasaría en el ecuador. (Véase "Bath-Tub Vortex", por Ascher H. Shapiro, *Nature*, diciembre 15, 1962, pág. 1080.)
28. Explique por qué no es posible retirar el filtro de papel del embudo de la figura 26 soplando por el extremo angosto.

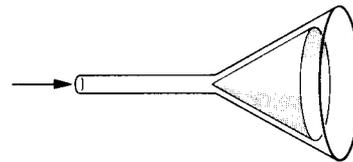


Figura 26 Pregunta 28.

29. De acuerdo con la ecuación de Bernoulli, un aumento de velocidad debe estar asociado a una disminución de la presión. Sin embargo, cuando ponemos la mano fuera de la ventanilla de un automóvil en movimiento, aumentando la velocidad a la cual fluye el aire, sentimos un *aumento* de presión. ¿Por qué no es esto una violación de la ecuación de Bernoulli?
30. ¿Por qué la presencia de la atmósfera reduce el alcance máximo de ciertos objetos (por ejemplo, las pelotas de tenis) pero aumenta el alcance máximo de otros (por ejemplo, los discos voladores o las pelotas de golf)?
31. Un disco puede llegar más lejos lanzado *contra* un viento de 25 mi/h que a favor del viento. ¿Cuál es la explicación? (*Sugerencia*: Piense en la fuerza ascensional dinámica y en el arrastre.)
32. Explique por qué las pelotas de golf tienen hoyuelos.
33. Cuanto más largo sea el tablón y haya menos profundidad en el agua, más lejos se deslizará una tabla para flotar sobre las olas (*surf board*). Explique. (Véase "The Surf Skimmer", por R. D. Edge, *American Journal of Physics*, Julio de 1968, pág. 630.)
34. Si se vierte de una tetera, el agua tiene una tendencia a salir a lo largo del borde inferior de la boca de salida. Explique. (Véase "The Teapot Effect... a Problem", por Markus Reiner, *Physics Today*, septiembre de 1956, pág. 16.)
35. Las marmotas viven en colonias grandes en sistemas complejos de madrigueras interconectadas. Encaran el problema de mantener en sus madrigueras un abastecimiento de aire suficiente para evitar la asfixia. La evitan construyendo montículos cónicos de tierra sobre algunas de sus muchas aberturas de madriguera. En términos de la ecuación de Bernoulli, ¿cómo trabaja este esquema de aire

acondicionado? Obsérvese que, debido a las fuerzas viscosas, la velocidad del viento en la pradera está menos cerca del nivel del suelo de lo que lo está incluso a unas cuantas pulgadas más arriba. (Véase *New Scientist*, enero 27, 1972, pág. 191.)

36. La viscosidad es un ejemplo de un fenómeno de transporte. ¿Qué propiedad está siendo transportada? ¿Puede usted pensar en otros fenómenos de transporte y en sus propiedades correspondientes?

37. En tiempo de frío, ¿por qué recomiendan los fabricantes de automóviles emplear aceites "multigrado" (multiviscosidad) para el motor?
38. ¿Por qué es más importante tener en cuenta la viscosidad en un fluido que circula por un conducto angosto que en un conducto relativamente sin restricción?
39. La viscosidad puede retrasar la presencia de turbulencia en el flujo de los fluidos; es decir, tiende a estabilizar el flujo. Considere el jarabe y el agua, por ejemplo, y encuentre una explicación aceptable.

## PROBLEMAS

### Sección 18-2 Trayectoria de una corriente y la ecuación de continuidad

- Un tubo de 34.5 cm de diámetro conduce agua que circula a razón de 2.62 m/s. ¿Cuánto tiempo le tomará descargar 1600 m<sup>3</sup> de agua?
- Una manguera de jardín que tiene un diámetro interno de 0.75 in está conectada a un aspersor que consta simplemente de un accesorio con 24 orificios, cada uno de 0.050 in de diámetro. Si el agua de la manguera tiene una velocidad de 3.5 ft/s, ¿a qué velocidad sale por los orificios del aspersor?
- La figura 27 muestra la confluencia de dos corrientes que forman un río. Una corriente tiene una anchura de 8.2 m, una profundidad de 3.4 m, y una velocidad de 2.3 m/s. La otra corriente tiene 6.8 m de anchura, 3.2 m de profundidad, y fluye a razón de 2.6 m/s. La anchura del río es de 10.7 m y la velocidad de su corriente es de 2.9 m/s. ¿Cuál es su profundidad?

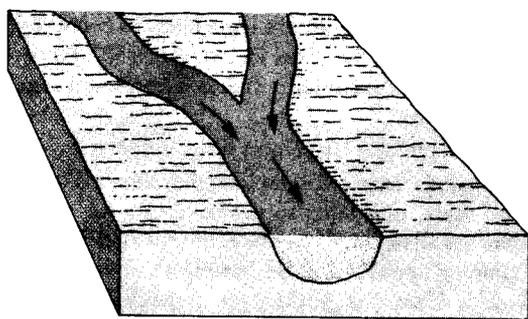


Figura 27 Problema 3.

- Se bombea continuamente agua que se extrae de un sótano inundado con una velocidad de 5.30 m/s por medio de una manguera uniforme de 9.70 mm de radio. La manguera pasa por una ventana situada a 2.90 m sobre el nivel del agua. ¿Cuánta potencia proporciona la bomba?
- Un río de 21 m de anchura y 4.3 m de profundidad irriga una superficie de 8500 km<sup>2</sup> donde la precipitación (plu-

vial) promedio es de 48 cm/año. Una cuarta parte de ésta regresa posteriormente a la atmósfera por evaporación, pero el resto corre finalmente por el río. ¿Cuál es la velocidad promedio de la corriente del río?

- Las corrientes de las mareas en los canales angostos que unen a las bahías costeras con el océano pueden ser muy rápidas. El agua debe fluir hacia la bahía al elevarse la marea y salir de nuevo al mar durante la bajamar. Considere la bahía rectangular mostrada en la figura 28a. La bahía está unida al mar por medio de un canal de 190 m de anchura y 6.5 m de profundidad respecto al nivel medio del mar. La gráfica (figura 28b) muestra la variación diurna del nivel del agua en la bahía. Calcule la velocidad promedio de la corriente de las mareas en el canal.

### Sección 18-3 La ecuación de Bernoulli

- ¿Cuánto trabajo efectúa la presión al bombear 1.4 m<sup>3</sup> de agua por un tubo de 13 mm de diámetro interno si la diferencia de presión entre los extremos del tubo es de 1.2 atm?
- La toma de agua de una presa (véase la Fig. 29) tiene un área de sección transversal de 7.60 ft<sup>2</sup>. El agua fluye en ella a una velocidad de 1.33 ft/s. En la planta de generación que está situada a 572 ft abajo del punto de toma, el agua fluye a razón de 31 ft/s. (a) Halle la diferencia de presión, en lb/in<sup>2</sup>, entre la toma y la descarga. (b) Halle el área del tubo de descarga. La densidad promedio del agua es de 62.4 lb/ft<sup>3</sup>.
- A veces, se prueban modelos de torpedos en un tubo horizontal por el que fluye el agua, muy similar al túnel de viento que se emplea para probar modelos de aeroplanos. Considere un tubo circular de 25.5 cm de diámetro interno y un modelo de torpedo, alineado a lo largo del eje del tubo, con un diámetro de 4.80 cm. El torpedo va a ser probado con agua que circula a razón de 2.76 m/s. (a) ¿A qué velocidad deberá fluir el agua en la parte no reducida del tubo? (b) Halle la diferencia de presión entre la parte no reducida y la parte reducida del tubo.
- Por una tubería con un área de la sección transversal de 4.20 cm<sup>2</sup> circula el agua a una velocidad de 5.18 m/s. El agua desciende gradualmente 9.66 m mientras que el área

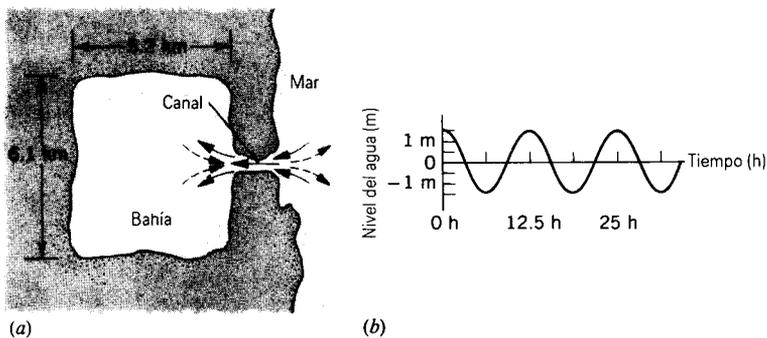


Figura 28 Problema 6.

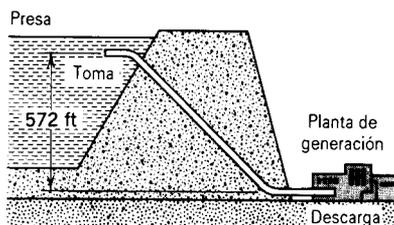


Figura 29 Problema 8.

del tubo aumenta en  $7.60 \text{ cm}^2$ . (a) ¿Cuál es la velocidad del flujo en el nivel inferior? (b) La presión en el nivel superior es de  $152 \text{ kPa}$ ; halle la presión en el nivel inferior.

11. Supóngase que dos tanques, 1 y 2, cada uno con una gran abertura en la parte superior, contienen líquidos diferentes. Se practica un pequeño orificio en el costado de cada tanque a la misma profundidad  $h$  debajo de la superficie del líquido, pero el orificio del tanque 1 tiene la mitad del área de sección transversal que tiene el orificio del tanque 2. (a) ¿Cuál es la razón  $\rho_1/\rho_2$  de las densidades de los fluidos si se observa que el flujo de masa es el mismo a través de los dos orificios? (b) ¿Cuál es la razón de los flujos volumétricos de los dos tanques? (c) Se desea igualar los dos flujos añadiendo o drenando fluido en el tanque 2. ¿Cuál sería la nueva altura del fluido sobre el orificio del tanque 2 para hacer que la cantidad de flujo en el tanque 2 sea igual a la del tanque 1?
12. Durante un huracán está soplando aire (densidad =  $1.2 \text{ kg/m}^3$ ) sobre el tejado de una casa a una velocidad de  $110 \text{ km/h}$ . (a) ¿Cuál es la diferencia de presión entre el interior y el exterior que tiende a levantar el tejado? (b) ¿Cuál sería la fuerza ascensional en un tejado de  $93 \text{ m}^2$  de área?
13. Las ventanas de un edificio de oficinas tienen  $4.26 \text{ m}$  por  $5.26 \text{ m}$ . En un día tempestuoso, el aire sopla a razón de  $28.0 \text{ m/s}$  al pasar por una ventana en el piso 53. Calcúlese la fuerza neta sobre la ventana. La densidad del aire es de  $1.23 \text{ kg/m}^3$ .
14. Un líquido fluye por una tubería horizontal cuyo radio interior es de  $2.52 \text{ cm}$ . La tubería se dobla hacia arriba hasta una altura de  $11.5 \text{ m}$  donde se ensancha y se une con otra tubería horizontal de  $6.14 \text{ cm}$  de radio interior. ¿Cuál debe ser el flujo volumétrico si la presión en las dos tuberías horizontales es la misma?

15. La figura 30 muestra un líquido que está siendo descargado por un orificio practicado en un tanque grande y situado a una distancia  $h$  bajo la superficie del líquido. El tanque está abierto por arriba. (a) Aplique la ecuación de Bernoulli a una línea de corriente líquida que una a los puntos 1, 2, y 3, y demuestre que la velocidad de salida es

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Esta ecuación se conoce como la *ley de Torricelli*. (b) Si el orificio estuviese curvado directamente hacia arriba, ¿a qué altura se elevaría la línea de corriente líquida? (c) ¿Cómo afectaría al análisis la viscosidad o la turbulencia?

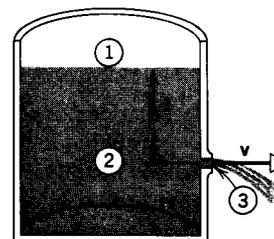


Figura 30 Problema 15.

16. Un tanque está lleno de agua hasta una altura  $H$ . En una de sus paredes se taladra un orificio a una profundidad  $h$  bajo la superficie del agua (Fig. 31). (a) Demuestre que la distancia  $x$  desde la base de la pared hasta donde cae la corriente al suelo está dada por  $x = 2\sqrt{h(H-h)}$ . (b) Podría taladrarse un orificio a otra profundidad de modo que esta segunda corriente tuviese el mismo alcance? De ser así, a qué profundidad? (c) ¿A qué profundidad debería estar el orificio para hacer que la corriente de salida caiga al suelo a la distancia máxima a partir de la base del tanque? ¿Cuál es esta distancia máxima?
17. Un francotirador dispara una bala de rifle contra un tanque de gasolina, haciéndole un orificio a  $53.0 \text{ m}$  bajo la superficie de la gasolina. El tanque se ha sellado y se ha sometido a una presión absoluta de  $3.10 \text{ atm}$ , como se muestra en la figura 32. La gasolina almacenada tiene una densidad de  $660 \text{ kg/m}^3$ . ¿A qué velocidad comienza la gasolina a salir disparada por el orificio?
18. Considérese un tubo en U uniforme con un diafragma en el fondo y lleno de un líquido a alturas diferentes en cada

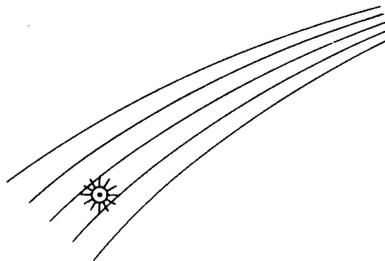
tiempo en cualquier punto en particular. A menudo puede conseguirse esta condición a velocidades de flujo bajas; una corriente que fluya continuamente es un ejemplo. En el flujo no es estacionario, como en una ola grande provocada por la marea, las velocidades  $v$  son funciones del tiempo. En el caso del flujo *turbulento*, tal como en los rápidos de un río o en una caída de agua, las velocidades varían erráticamente de punto a punto así como de tiempo a tiempo.

2. *El flujo de un fluido puede ser compresible o incompresible.* Si la densidad  $\rho$  de un fluido es constante, independiente de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , y  $t$ , su flujo se llama *flujo incompresible*. Puede considerarse usualmente que los líquidos fluyen incompresiblemente. Pero aun en un gas altamente compresible la variación de la densidad puede ser insignificante, y para objetos prácticos podemos considerar que el flujo es incompresible. Por ejemplo, al volar a velocidades mucho menores que la velocidad del sonido en el aire (que se describe como aerodinámica subsónica), el flujo del aire sobre las alas es casi incompresible.

3. *El flujo de los fluidos puede ser viscoso o no viscoso.* En el movimiento de los fluidos la viscosidad es el análogo de la fricción en el movimiento de los sólidos. Cuando un fluido fluye de modo que no disipe energía por medio de fuerzas viscosas, se dice que el fluido es *no viscoso*. En muchos casos, como en problemas de lubricación, la viscosidad es extremadamente importante; por ejemplo, los aceites para motor se denominan de acuerdo a su viscosidad y a su variación con la temperatura. En otros casos, la viscosidad puede ser de poca importancia relativamente, y al despreciarla podemos emplear una descripción más sencilla en términos de flujo no viscoso.

4. *El flujo de los fluidos puede ser rotatorio o no rotatorio.* Si un elemento del fluido en movimiento no gira en torno a un eje que pase por el centro de masa del elemento, se dice que el flujo es *no rotatorio*. Podemos imaginar a una pequeña rueda de paletas sumergida en el flujo en movimiento (Fig. 1). Si la rueda se mueve sin girar, el movimiento es no rotatorio; de otro modo será rotatorio. Nótese que un elemento en particular del fluido puede moverse en una trayectoria circular y experimentar también un flujo no rotatorio; una analogía es el movimiento de las góndolas colgantes de una "rueda gigante" de feria: aun cuando la rueda gire, las personas que viajan en las góndolas no giran respecto a sus centros de masa. El remolino que se forma cuando el agua fluye por el drenaje de la bañera es un ejemplo de esta clase de flujo no rotatorio.

Para simplificar la descripción matemática del movimiento de un fluido, limitaremos nuestra exposición de la dinámica de los fluidos en su mayor parte al flujo



**Figura 1** Una rueda de paletas pequeña que flota libremente en un líquido al fluir. Si la rueda gira, llamamos al flujo *rotatorio*; si no, el flujo es *no rotatorio*.

estacionario, incompresible, no viscoso, no rotatorio. Sin embargo, corremos el riesgo de que, con tantas suposiciones simplificantes, ya no estemos estudiando un fluido real. Además, a veces es difícil decidir si una propiedad determinada de un fluido (digamos, su viscosidad) puede ser despreciada en una situación particular. A pesar de todo esto, el análisis restringido que vamos a llevar a cabo tiene una aplicación amplia en la práctica, como veremos.

## 18-2 TRAYECTORIA DE UNA CORRIENTE Y LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

En el flujo estacionario la velocidad  $v$  en un punto dado es constante en el tiempo. Consideremos al punto  $P$  (Fig. 2) dentro del fluido. Puesto que  $v$  en  $P$  no cambia con el tiempo en el flujo estacionario, cada partícula de fluido que llegue a  $P$  pasará con la misma velocidad y en la misma dirección. El movimiento de cada partícula que pase por  $P$  sigue entonces la misma trayectoria, llamada *línea de corriente*. Cada partícula de fluido que pase por  $P$  pasará más tarde por puntos más a lo largo de la línea de corriente, tal como  $Q$  y  $R$  en la figura 2. Además, cada partícula de fluido que pase por  $R$  debe haber pasado previamente por  $P$  y  $Q$ .

La magnitud del vector velocidad de la partícula de fluido cambiará, en general, al moverse a lo largo de la línea de corriente. La dirección del vector de la velocidad



**Figura 2** En el flujo estacionario, una partícula de fluido que pase por  $P$  traza una línea de corriente, pasando más tarde por los puntos  $Q$  y  $R$  corriente abajo. Cualquier otra partícula que pase por  $P$  debe seguir esta misma trayectoria.

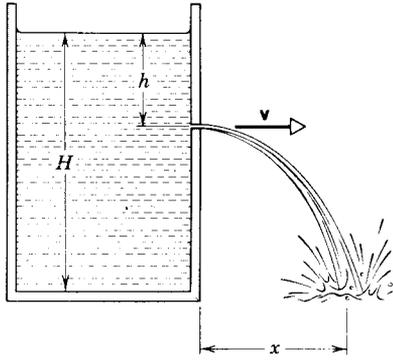


Figura 31 Problema 16.

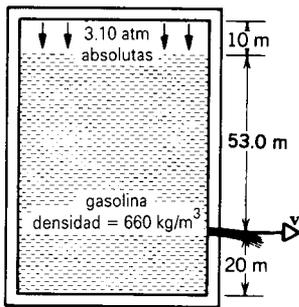


Figura 32 Problema 17.

brazo (véase la Fig. 33). Imaginemos ahora que el diafragma se perfora de modo que el líquido fluye de izquierda a derecha. (a) Demuestre que la aplicación de la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 3 conduce a una contradicción. (b) Explique por qué la ecuación de Bernoulli no es aplicable aquí. (Sugerencia: ¿Es estacionario el flujo?)

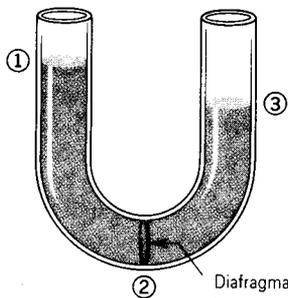


Figura 33 Problema 18.

19. Si una persona sopla aire a una velocidad de 15.0 m/s en la parte superior de un lado de un tubo en U que contiene agua, ¿cuál será la diferencia entre los niveles del agua en los dos lados? Suponga que la densidad del aire sea de 1.20 kg/m<sup>3</sup>.
20. El agua dulce embalsada tras la cortina de una presa tiene una profundidad de 15.2 m. Un tubo horizontal de 4.30 cm de diámetro pasa a través de la cortina a 6.15 m

bajo la superficie del agua, como se muestra en la figura 34. En la salida del tubo se ha colocado un tapón. (a) Halle la fuerza de fricción entre el tapón y las paredes del tubo. (b) Se retira el tapón. ¿Qué volumen de agua sale por el tubo en 3.00 h?

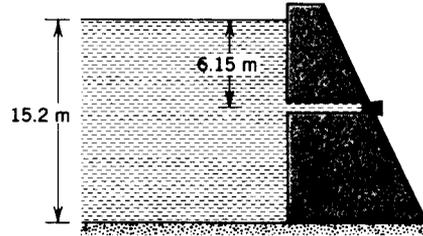


Figura 34 Problema 20.

21. Un sifón es un aparato para extraer líquido de un recipiente sin inclinarlo. Funciona como se muestra en la figura 35. El tubo debe estar lleno inicialmente, pero una vez se ha hecho esto, el líquido fluirá hasta que el nivel descienda por debajo de la abertura del tubo en A. El líquido tiene una densidad  $\rho$  y una viscosidad despreciable. (a) ¿A qué velocidad sale el líquido del tubo en C? (b) ¿Cuál es la presión del líquido en el punto más elevado B? (c) ¿Cuál es la mayor altura h posible a la que el sifón puede elevar el agua?

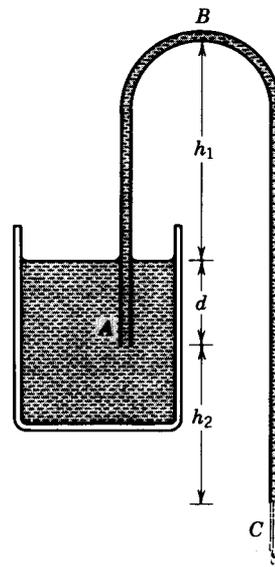


Figura 35 Problema 21.

22. (a) Considérese una corriente de fluido de densidad  $\rho$  con velocidad  $v_1$  que pasa *repentinamente* de un tubo cilíndrico de área de sección transversal  $a_1$  a un tubo cilíndrico más ancho de área de sección transversal  $a_2$  (véase la Fig. 36). El chorro se mezclará con el fluido circundante

y, después de mezclarse, fluirá casi uniformemente a una velocidad promedio  $v_2$ . Sin referirse a los detalles del mezclado, use argumentos del ímpetu para demostrar que el aumento de presión debido al mezclado es aproximadamente

$$p_2 - p_1 = \rho v_2(v_1 - v_2).$$

(b) Demuestre a partir de la ecuación de Bernoulli que en un tubo que se vacíe *gradualmente* obtendríamos

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2).$$

(c) Halle la pérdida de presión debida al ensanchamiento repentino del tubo. ¿Puede usted trazar una analogía con las colisiones elásticas e inelásticas de la mecánica de la partícula?

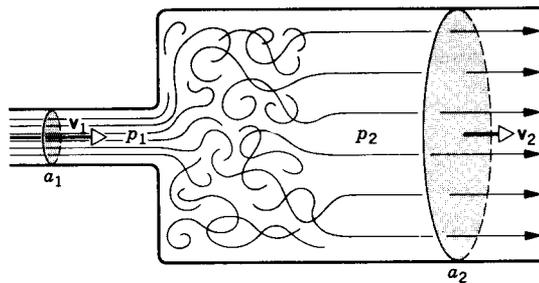


Figura 36 Problema 22.

23. Una jarra contiene 15 vasos de jugo de naranja. Cuando se abre la espita del fondo transcurren 12.0 s para llenar de jugo un vaso. Si dejamos la espita abierta, ¿cuánto tiempo tardarán en llenarse los 14 vasos restantes hasta agotar el jugo?

**Sección 18-4 Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli y de la ecuación de continuidad**

24. Un tubo de Pitot está montado en el ala de un aeroplano para determinar la velocidad del aeroplano con relación al aire, el cual tiene una densidad de  $1.03 \text{ kg/m}^3$ . El tubo contiene alcohol e indica una diferencia de nivel de 26.2 cm. ¿Cuál es la velocidad del aeroplano respecto al aire? La densidad del alcohol es de  $810 \text{ kg/m}^3$ .
25. Un tubo hueco tiene un disco *DD* adosado a su extremo (Fig. 37). Cuando se sopla aire de densidad  $\rho$  por el tubo, el disco atrae a la tarjeta *CC*. Sea  $A$  el área de la tarjeta y  $v$  la velocidad promedio del aire entre la tarjeta y el disco. Calcule la fuerza hacia arriba resultante sobre *CC*. Desprecie el peso de la tarjeta; suponga que  $v_0 \ll v$ , donde  $v_0$  es la velocidad del aire en el tubo hueco.
26. Una placa cuadrada de 9.10 cm de lado y 488 g de masa está embisagrada a lo largo de uno de los lados. Si se sopla aire sobre la superficie superior únicamente, ¿qué velocidad debe tener el aire para mantener horizontal a la placa? El aire tiene una densidad de  $1.21 \text{ kg/m}^3$ .
27. Sobre la parte superior del ala, de área  $A$ , de un aeroplano fluye el aire a una velocidad  $v$ , y pasa por debajo del ala a

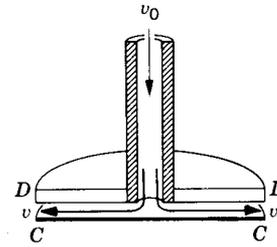


Figura 37 Problema 25.

una velocidad  $v_u$ . Demuestre que la ecuación de Bernoulli predice que la fuerza ascensional  $L$  sobre el ala será de

$$L = \frac{1}{2}\rho A(v_t^2 - v_u^2),$$

en donde  $\rho$  es la densidad del aire. (Sugerencia: Aplíquese la ecuación de Bernoulli a la línea de corriente que pasa justo sobre la superficie superior del ala y a la línea de corriente que pasa justo por debajo de la superficie inferior del ala. ¿Puede usted justificar que las constantes de las dos líneas de corriente sean iguales?)

28. Un aeroplano tiene un área de ala (de cada ala) de  $12.5 \text{ m}^2$ . A cierta velocidad del aire, éste fluye sobre la superficie superior del ala a razón de  $49.8 \text{ m/s}$  y sobre la superficie inferior del ala a  $38.2 \text{ m/s}$ . (a) Halle la masa del aeroplano. Suponga que el aeroplano viaja a velocidad constante y que los efectos de la fuerza ascensional asociados con el fuselaje y el conjunto de la cola son pequeños. Explique la fuerza ascensional si el aeroplano, que vuela a la misma velocidad que el aire está (b) en vuelo nivelado; (c) ascendiendo a  $15^\circ$ , y (d) descendiendo a  $15^\circ$ . La densidad del aire es de  $1.17 \text{ kg/m}^3$ . Véase el problema 27.
29. Considérese el aire estancado en el borde frontal de un ala y el aire que circula sobre la superficie del ala a una velocidad  $v$ . Suponga que la presión en el borde de entrada es la atmosférica aproximadamente y halle el mayor valor posible para  $v$  del flujo de corriente; suponga también que el aire es incompresible y utilice la ecuación de Bernoulli. Tome como densidad del aire  $1.2 \text{ kg/m}^3$ . ¿Cómo se compara esto con la velocidad del sonido bajo estas condiciones ( $340 \text{ m/s}$ )? ¿Puede usted explicar la diferencia? ¿Por qué habría de existir alguna conexión entre estas cantidades?
30. Un tubo de Venturi tiene un diámetro de 25.4 cm y una garganta de 11.3 cm de diámetro. La presión del agua en el tubo es  $57.1 \text{ kPa}$  y en la garganta es de  $32.6 \text{ kPa}$ . Calcule el flujo volumétrico del agua a través del tubo.
31. Considérese el medidor Venturi de la figura 9. Aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 2, y la ecuación de continuidad (Ec. 3), verifique la ecuación 11 para la velocidad del flujo en el punto 1.
32. Considérese el medidor Venturi de la figura 9, que contiene agua, sin el manómetro. Sea  $A = 4.75a$ . Suponga que la presión en el punto 1 sea  $2.12 \text{ atm}$ . (a) Calcule los valores de  $v$  en el punto 1 y de  $v'$  en el punto 2 que harían que la presión  $p'$  en el punto 2 fuese igual a cero. (b)

Calcule la cantidad de flujo volumétrico correspondiente si el diámetro en el punto 1 fuese 5.20 cm. El fenómeno en el punto 2 cuando  $p'$  decae a casi cero es conocido como *cavitación*. El agua se evapora en pequeñas burbujas.

**Sección 18-5 Campos de flujo**

- 33. Demuestre que la constante en la ecuación de Bernoulli es la misma para *todas* las líneas de corriente en el caso del flujo estacionario, no rotatorio de la figura 14.
- 34. Un campo de fuerza es conservativo si  $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$ . El círculo del signo de la integración significa que la integración va a ser considerada a lo largo de una curva cerrada (un viaje redondo) en el campo. Un flujo es un flujo potencial (y por tanto no rotatorio) si  $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 0$  para cada una de las líneas cerradas en el campo. Usando este criterio, demuestre que los campos (a) de la figura 14 y (b) de la figura 17 son campos de flujo potencial.
- 35. Los efectos centrífugos son considerables en flujos que estén fuertemente curvados. Considérese un elemento de fluido que se mueva a una velocidad  $v$  a lo largo de la línea de corriente de un flujo curvo en un plano horizontal (Fig. 38). (a) Demuestre que  $dp/dr = \rho v^2/r$ , de modo que la presión aumenta en una cantidad  $\rho v^2/r$  por unidad de distancia perpendicular a la línea de la corriente yendo del lado cóncavo al lado convexo de ésta. (b) Luego, utilice la ecuación de Bernoulli y este resultado para demostrar que  $vr$  es igual a una constante, de modo que las velocidades aumentan hacia el centro de curvatura. De aquí que las líneas de corriente que estén espaciadas uniformemente en una tubería recta se agrupen hacia la pared interior del pasaje curvo y se separen hacia la pared exterior. Este problema debe de compararse con el problema 29 del capítulo 17, donde el movimiento curvo se produce al hacer girar un recipiente. Allí la velocidad variaba directamente con  $r$ , pero aquí varía inversamente. (c) Demuestre que este flujo es no rotatorio.

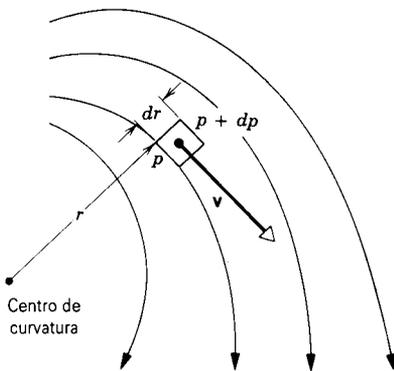


Figura 38 Problema 35.

- 36. Un modelo del movimiento planetario propuesto por René Descartes fue ampliamente aceptado antes de que Newton propusiera su teoría de la gravitación. En el modelo de Descartes los planetas eran atrapados y arrastrados por un remolino de partículas de éter centrado alrededor del Sol.

Newton demostró que este esquema de torbellino contradecía las observaciones porque: (a) la velocidad de una partícula de éter en el vértice varía inversamente a su distancia al Sol; (b) el periodo de revolución de una partícula tal varía directamente con el cuadrado de su distancia al Sol, y (c) este resultado contradice a la tercera ley de Kepler. Demuestre (a), (b), y (c).

**Sección 18-6 Viscosidad, turbulencia, y flujo caótico**

- 37. La figura 39 muestra una sección transversal de las capas superiores de la Tierra. La superficie de la Tierra se divide en varios bloques rígidos, llamados placas, que se deslizan (¡lentamente!) sobre una capa "fangosa" más baja llamada astenosfera. En la figura se relacionan las dimensiones típicas. Supóngase que la velocidad de la placa rígida mostrada sea  $v_0 = 48 \text{ mm/y}$  (mm/año), y que la base de la astenosfera no se mueva. Calcule el esfuerzo cortante en la base de la placa. La viscosidad del material de la astenosfera es de  $4.0 \times 10^{19} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ . Ignore la curvatura de la Tierra.

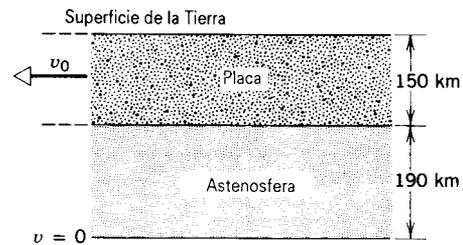


Figura 39 Problema 37.

- 38. Calcular la mayor velocidad a la cual puede fluir la sangre, a 37° C, por una arteria de 3.8 mm de diámetro si el flujo ha de permanecer estacionario.
- 39. Por un tubo horizontal de 1.88 cm de radio interno y 1.26 m de longitud fluye mercurio líquido (viscosidad =  $1.55 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$ ). El flujo volumétrico es de  $5.35 \times 10^{-2} \text{ L/min}$ . (a) Demuestre que el flujo es estacionario. (b) Calcule la diferencia de presión entre los dos extremos del tubo.
- 40. En la figura 40 se muestran las líneas de corriente de un campo de flujo de Poiseuille. El espaciamiento de las líneas de corriente indica que aunque el movimiento es rectilíneo, existe un gradiente de velocidad en dirección transversal. Demuestre que el flujo de Poiseuille es rotatorio.

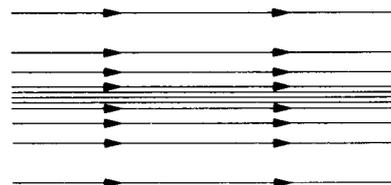


Figura 40 Problema 40.

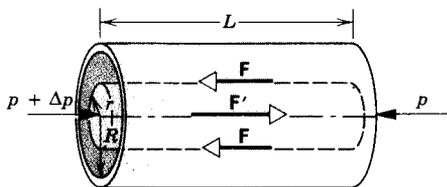
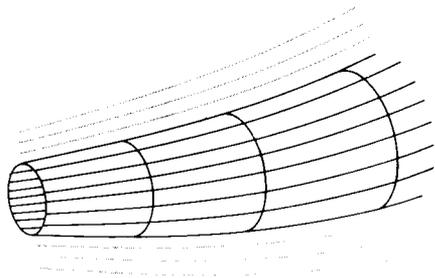


Figura 41 Problemas 41 y 42.

41. Un fluido de viscosidad  $\eta$  fluye estacionariamente por un tubo cilíndrico horizontal de radio  $R$  y longitud  $L$ , como se muestra en la figura 41. (a) Considere un cilindro arbitrario de fluido de radio  $r$ . Demuestre que la fuerza viscosa  $F$  debida a la capa circundante es  $F = -\eta(2\pi rL)dv/dr$ . (b) Demuestre que la fuerza  $F'$  que empuja a ese cilindro de fluido a lo largo del tubo es  $F' = (\pi r^2)\Delta p$ . (c) Utilice la condición de equilibrio para obtener una expresión para  $dv$  en términos de  $dr$ . Integre la expresión para obtener la ecuación 18.
42. Considere una vez más el fluido que corre por el tubo descrito en el problema 41 e ilustrado en la figura 41. Halle una expresión para el flujo de masa por un anillo anular entre los radios  $r$  y  $r + dr$ ; luego integre este resultado para hallar el flujo de masa total por el tubo, verificando por lo tanto la ecuación 20.
43. Se sopla una burbuja de jabón de 38.2 mm de radio por el extremo de un tubo angosto de 11.2 cm de longitud y 1.08 mm de diámetro interno. El otro extremo del tubo se halla expuesto a la atmósfera. Halle el tiempo que tarda el radio de la burbuja en descender a 21.6 mm. Suponga un flujo de Poiseuille en el tubo. (Use  $2.50 \times 10^{-2}$  N/m para la tensión superficial de la solución de jabón; la viscosidad del aire es de  $1.80 \times 10^{-3}$  N · s/m<sup>2</sup>.)



**Figura 3** Un haz de líneas de corriente forma un tubo de flujo.

en cualquier punto a lo largo de la línea de corriente es siempre tangente a ella.

Dos líneas de corriente no pueden cruzarse entre sí ya que, si lo hicieran, una partícula de fluido que llegue podría seguir un camino u otro, y el flujo no podría ser estacionario. En el flujo estacionario el patrón de las líneas de corriente no cambia con el tiempo.

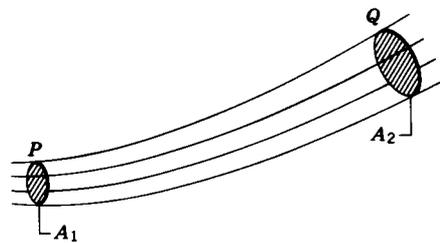
En principio podemos trazar una línea de una corriente a través de cada punto del fluido. Suponiendo un flujo estacionario, elegimos un número finito de líneas de corriente para formar un haz, como el patrón de líneas de corriente de la figura 3. Esta región tubular se llama *tubo de flujo*. La frontera de este tubo consiste en líneas de corriente a las cuales la velocidad de las partículas fluidas es siempre tangente. Así pues, ningún fluido puede cruzar la frontera de un tubo de flujo, y el tubo se comporta un tanto como una tubería de la misma forma. El fluido que entra por un extremo debe salir por el otro.

Consideremos en detalle el flujo del fluido por un tubo de flujo como el que se muestra en la figura 4. El fluido entra en  $P$  donde el área de la sección transversal es  $A_1$  y sale en  $Q$  donde el área es  $A_2$ . Sea  $v_1$  la velocidad de las partículas del fluido en  $P$  y  $v_2$  la de las partículas en  $Q$ . En el intervalo de tiempo  $\Delta t$  un elemento de fluido recorre aproximadamente la distancia  $v \Delta t$ . Entonces el fluido que cruce  $A_1$  en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  tiene un volumen de  $A_1 v_1 \Delta t$ , aproximadamente. Si su densidad en esa ubicación es  $\rho_1$ , entonces la masa de fluido  $\Delta m_1$  que cruza por  $A_1$  es, de alrededor de

$$\Delta m_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t.$$

El *flujo de masa*, definido como la masa de fluido por unidad de tiempo que pasa por cualquier sección transversal, es entonces  $\Delta m_1 / \Delta t = \rho_1 A_1 v_1$  en  $P$ , aproximadamente. Debemos considerar que  $\Delta t$  sea lo suficientemente pequeño como para que en este intervalo de tiempo ni  $v$  ni  $A$  varíen en forma considerable durante la distancia que viaja el fluido. En el límite según  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtenemos el resultado preciso:

$$\text{flujo de masa en } P = \rho_1 A_1 v_1,$$



**Figura 4** Un tubo de flujo que tiene un área  $A_1$  de la sección transversal en  $P$ , y un área  $A_2$  en  $Q$ .

y, según un análisis similar,

$$\text{flujo de masa en } Q = \rho_2 A_2 v_2,$$

donde  $\rho_2$ ,  $A_2$ , y  $v_2$  representan, respectivamente, la densidad, el área de la sección transversal, y la velocidad del flujo en  $Q$ .

Hemos supuesto que el fluido entra en el tubo únicamente en  $P$  y sale únicamente en  $Q$ . Esto es, entre  $P$  y  $Q$  no existen otras "fuentes" por donde el fluido pueda entrar al tubo ni "sumideros" por donde pueda salir. Además, el flujo es estacionario, de modo que la densidad del fluido entre  $P$  y  $Q$  no cambia con el tiempo (aun cuando pueda cambiar de lugar a lugar). Entonces el flujo de masa en  $P$  debe ser igual al flujo de masa en  $Q$ :

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2, \quad (1)$$

o, en términos más generales que se refieran a cualquier ubicación en el tubo de flujo,

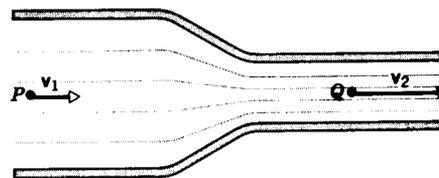
$$\rho A v = \text{constante}. \quad (2)$$

Este resultado expresa la *ley de conservación de la masa* en la dinámica de los fluidos.

Si el fluido es incompresible, como lo supondremos de ahora en adelante, entonces  $\rho_1 = \rho_2$ , y la ecuación 1 adquiere la forma más sencilla

$$A_1 v_1 = A_2 v_2, \quad (3)$$

o, al definir que  $R$  sea la *razón de flujo volumétrico* (o *flujo volumétrico*)  $A v$ ,



**Figura 5** La velocidad debe aumentar al estrecharse el área de un tubo horizontal. Si no actúa ninguna otra fuerza sobre el fluido, la presión en  $P$  debe ser mayor que la presión en  $Q$ , de modo que en dirección  $PQ$  actúa una fuerza para proporcionar la aceleración necesaria.

$$R = Av = \text{constante.} \quad (4)$$

Las unidades de  $R$  en el SI son  $\text{m}^3/\text{s}$ . Nótese que la ecuación 3 predice que en el flujo estacionario incompresible la velocidad del flujo varía inversamente con el área de la sección transversal, siendo mayor en las partes más angostas del tubo.

La constancia del flujo volumétrico a lo largo de un tubo de flujo ofrece una interpretación gráfica importante de las líneas de la corriente, como se ve en la figura 5. En una parte angosta del tubo, las líneas de corriente deben de estar más apretadas que en una parte ancha. De aquí que, cuando la distancia entre líneas de corriente disminuya, la rapidez del fluido debe aumentar. Por lo tanto, concluimos que las líneas de corriente espaciadas indican regiones de velocidad relativamente baja, y que las líneas de corriente apretadas indican regiones de velocidad relativamente elevada.

Podemos obtener otro resultado interesante al aplicar la segunda ley de Newton para el movimiento al flujo del fluido entre  $P$  y  $Q$  (Fig. 5). Una partícula de fluido en  $P$  con una velocidad  $v_1$  debe ser acelerada en dirección hacia adelante al adquirir la velocidad hacia adelante  $v_2$  más elevada en  $Q$ . Esta aceleración puede provenir únicamente de una fuerza ejercida en la dirección  $PQ$ , y (si no existe ninguna otra fuerza externa, por ejemplo, la gravedad) la fuerza debe surgir de un cambio de la presión en el seno del fluido. Para proporcionar esta fuerza, la presión debe ser mayor en  $P$  que en  $Q$ . Por lo tanto, en ausencia de otras fuentes de aceleración, las regiones de mayor velocidad del fluido deben estar asociadas con presiones del fluido más bajas. En la sección siguiente, trataremos más a fondo esta conclusión preliminar respecto a la dinámica del fluido.

¿Ha formado usted parte, alguna vez, de un “fluido humano” en el que una muchedumbre de personas tratara de pasar por una puerta angosta? Hacia la parte de atrás de la muchedumbre, el área de la sección transversal es grande, la presión es grande, pero la velocidad de avance es bastante pequeña. Una vez atravesando la puerta, la muchedumbre se mueve más rápidamente: la velocidad del flujo aumenta. Este “fluido” es compresible y viscoso, y el flujo puede ser tanto rotatorio ¡como turbulento!

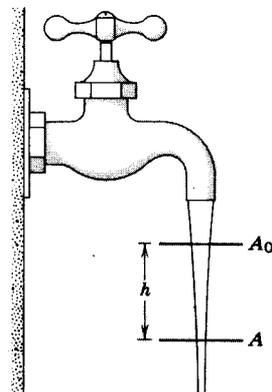
---

**Problema muestra 1** La figura 6 muestra cómo se angosta al caer la corriente de agua que sale por un grifo. El área de la sección transversal  $A_0$  es de  $1.2 \text{ cm}^2$  y la de  $A$  es de  $0.35 \text{ cm}^2$ . Los dos niveles están separados por una distancia vertical  $h$  ( $= 45 \text{ mm}$ ). ¿En qué cantidad fluye el agua de la llave?

**Solución** Partiendo de la igualdad del flujo volumétrico (Ec. 3) tenemos

$$A_0 v_0 = Av,$$

donde  $v_0$  y  $v$  son las velocidades del agua a los niveles correspondientes. Partiendo de la ecuación 20 del capítulo 2 podemos



**Figura 6** Problema muestra 1. Cuando el agua cae de una llave, su velocidad aumenta. Como la cantidad de flujo debe ser la misma en todas las secciones transversales, la corriente debe volverse más angosta al caer. (Se desprecian los efectos asociados con la tensión superficial.)

también escribir, puesto que cada elemento de agua está cayendo libremente debido a la gravedad,

$$v^2 = v_0^2 + 2gh.$$

Eliminando a  $v$  entre estas dos ecuaciones y resolviendo para  $v_0$ , obtenemos

$$v_0 = \sqrt{\frac{2ghA^2}{A_0^2 - A^2}} = \sqrt{\frac{(2)(9.8 \text{ m/s}^2)(0.045 \text{ m})(0.35 \text{ cm}^2)^2}{(1.2 \text{ cm}^2)^2 - (0.35 \text{ cm}^2)^2}} = 0.286 \text{ m/s} = 28.6 \text{ cm/s}.$$

La razón de flujo volumétrico  $R$  es entonces

$$R = A_0 v_0 = (1.2 \text{ cm}^2)(28.6 \text{ cm/s}) = 34 \text{ cm}^3/\text{s}.$$

Con esta cantidad, tardaríamos unos 3 s en llenar un frasco de 100 mL.

**La ecuación de continuidad (Opcional)**

Las ecuaciones 2 y 4 son ejemplos de relaciones matemáticas conocidas como *ecuaciones de continuidad*. Una ecuación de continuidad es, en efecto, una ley de conservación de la materia. Ésta nos dice que si no existen fuentes (lugares por donde se introduzca materia nueva) ni sumideros (lugares por donde la materia que fluye pueda escapar), entonces la masa  $dm$  contenida en cualquier volumen  $dV$  debe permanecer constante. Hemos derivado estas ecuaciones para condiciones muy especiales; una ecuación de continuidad más general es

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

Esta ecuación se basa en la consideración de un volumen arbitrario de *espacio* (no de fluido)  $dV = dx dy dz$ . El elemento de volumen permanece fijo en el espacio mientras que el fluido fluye a través de él. Los primeros tres términos, cuando se les multiplica por  $dV$ , dan el flujo de salida neto de la masa de fluido que proviene del volumen, en términos de sus componentes de velocidad  $v_x$ ,  $v_y$ , y  $v_z$ . El cuarto término, de nuevo multiplicado por  $dV$ , da la cantidad a la cual está cambiando la

masa dentro del elemento de volumen. Cuando estos términos suman cero, significa que cualquier flujo de salida (o de entrada) neto de masa debe ser compensado por un cambio equivalente en la masa dentro del elemento. Una vez más, esto es precisamente un postulado de la conservación de la masa. Si el elemento de volumen  $dV$  contiene fuentes o sumideros, éstos estarían incluidos en la ecuación 5 haciendo al lado derecho igual a la cantidad a la que la materia está entrando en, o saliendo de,  $dV$ . (Las derivadas que aparecen en la ecuación 5 son derivadas parciales, porque la densidad y las componentes de la velocidad pueden ser funciones de más de una variable).

Las ecuaciones de continuidad son comunes en física y juegan un papel fundamental no solamente en la mecánica de los fluidos, sino en cualquier materia o tema en el cual interviene un flujo. Por ejemplo, en electromagnetismo consideramos no el flujo de masa sino el flujo de carga eléctrica. Las componentes de  $v$  en la ecuación 5 son reemplazadas por componentes correspondientes de la corriente eléctrica, mientras que la densidad de masa es reemplazada por la densidad de carga. La interpretación de la ecuación no cambia, excepto que entonces se refiere a la conservación de la carga eléctrica más que a la masa. (Véanse los capítulos 27 y 32.) ■

## 18-3 LA ECUACIÓN DE BERNOULLI\*

La ecuación de Bernoulli, que es una relación fundamental en la mecánica de los fluidos, no es un principio nuevo sino que es derivable de las leyes básicas de la mecánica newtoniana. Hallamos conveniente derivarla del teorema trabajo-energía (véase la Sec. 7-4), ya que es esencialmente un postulado del teorema trabajo-energía para el flujo de los fluidos.

Consideremos el flujo estacionario, incompresible, no viscoso y no rotatorio de un fluido a lo largo de la tubería o tubo de flujo de la figura 7. La porción de tubería que se muestra en la figura tiene una sección transversal  $A_1$  uniforme a la izquierda. Allí es horizontal con una elevación  $y_1$  sobre cierto nivel de referencia. Gradualmente se ensancha y eleva, y a la derecha tiene una sección transversal  $A_2$  uniforme. Allí es horizontal en una elevación  $y_2$ . Concentrémonos en la porción de fluido representada por los sombreados suave e intenso y llamemos a este fluido "el sistema". Consideremos luego el movimiento del sistema desde la posición mostrada en la figura 7a hasta la mostrada en la figura 7b. En todos los puntos de la parte angosta de la tubería la presión es  $p_1$  y la velocidad  $v_1$ ; en todos los puntos de la porción ancha la presión es  $p_2$  y la velocidad  $v_2$ .

El teorema trabajo-energía (véase la Ec. 19 del capítulo 7) establece: el trabajo efectuado por la fuerza resultante

que actúa sobre un sistema es igual al cambio en la energía cinética del sistema. En la figura 7 las fuerzas que efectúan un trabajo sobre el sistema, suponiendo que podemos despreciar a las fuerzas viscosas, son las fuerzas de la presión  $p_1 A_1$  y  $p_2 A_2$  que actúan sobre los extremos a mano izquierda y derecha del sistema, respectivamente, y la fuerza de la gravedad. Al circular el fluido por la tubería el efecto neto, como lo muestra la comparación de las figuras 7a y 7b, es elevar al fluido representado por el área de sombreado intenso de la figura 7a a la posición mostrada en la figura 7b. La cantidad de fluido representada por el sombreado suave no cambia a causa del flujo.

Podemos hallar el trabajo  $W$  efectuado sobre el sistema por la fuerza resultante como sigue:

1. El trabajo efectuado sobre el sistema por la fuerza de la presión  $p_1 A_1$  es  $p_1 A_1 \Delta l_1$ .
2. El trabajo efectuado sobre el sistema por la fuerza de la presión  $p_2 A_2$  es  $-p_2 A_2 \Delta l_2$ . Nótese que es negativo, porque la fuerza actúa en dirección opuesta al desplazamiento horizontal.
3. El trabajo efectuado sobre el sistema por la gravedad está asociado con la elevación del elemento de fluido en sombreado intenso desde la altura  $y_1$  hasta la altura  $y_2$  y es  $-\Delta m g(y_2 - y_1)$  donde  $\Delta m$  es la masa de fluido en cualquiera de las áreas con sombreado intenso. Esta contribución es también negativa a causa de que la fuerza gravitatoria actúa en dirección opuesta al desplazamiento vertical.

El trabajo neto  $W$  efectuado sobre el sistema por todas las fuerzas se halla al sumar estos tres términos, es decir,

$$W = p_1 A_1 \Delta l_1 - p_2 A_2 \Delta l_2 - \Delta m g(y_2 - y_1).$$

Ahora bien,  $A_1 \Delta l_1 (= A_2 \Delta l_2)$  es el volumen  $\Delta V$  del elemento de fluido en sombreado intenso, el cual podemos escribir como  $\Delta m/\rho$ , en donde  $\rho$  es la densidad (constante) del fluido. Recordemos que los dos elementos de fluido tienen la misma masa, de modo que al disponer que  $A_1 \Delta l_1 = A_2 \Delta l_2$  hemos supuesto que el fluido es incompresible. Con esta hipótesis tenemos

$$W = (p_1 - p_2)(\Delta m/\rho) - \Delta m g(y_2 - y_1). \quad (6)$$

El cambio en la energía cinética del elemento de fluido es

$$\Delta K = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2.$$

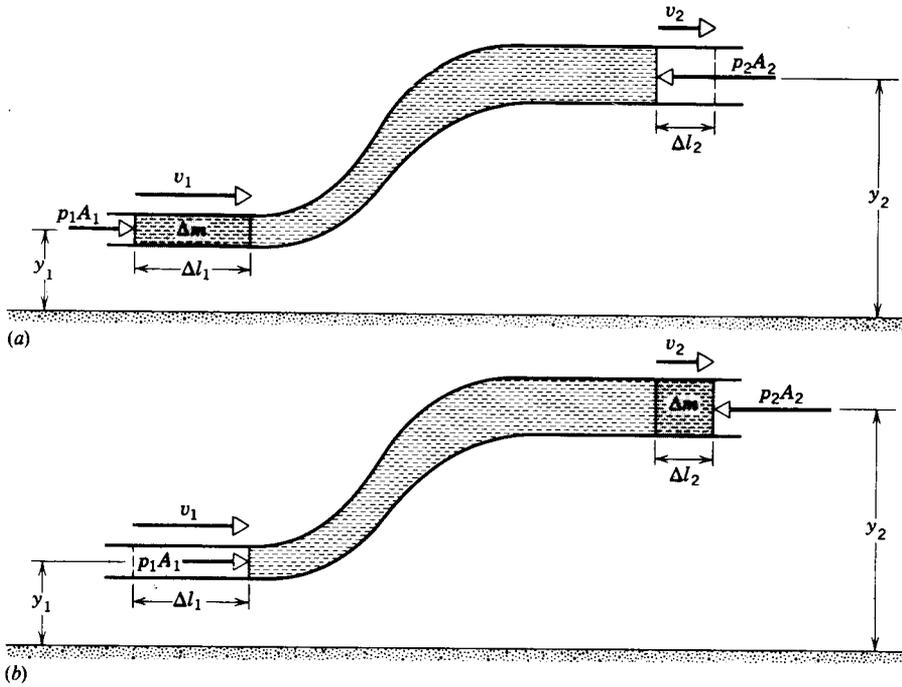
Partiendo del teorema trabajo-energía,  $W = \Delta K$ , y entonces tenemos

$$(p_1 - p_2)(\Delta m/\rho) - \Delta m g(y_2 - y_1) = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2, \quad (7)$$

lo que, después de cancelar al factor común de  $\Delta m$ , puede reacomodarse para leerse como sigue:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2. \quad (8)$$

\* En la *Encyclopaedia Britannica* (edición undécima) figuran ocho miembros de la familia Bernoulli. Aquí nos referimos a Daniel Bernoulli (1700-1782), quizá el más notable de esta destacada familia.



**Figura 7** El fluido fluye por una tubería en forma estacionaria. Durante el intervalo de (a) a (b), el efecto neto del flujo es la transferencia del elemento de fluido indicado por el sombreado intenso desde el extremo de entrada de la tubería hasta el extremo de salida.

Puesto que los subíndices 1 y 2 se refieren a dos ubicaciones cualesquiera a lo largo de la tubería, podemos suprimir los subíndices y escribir

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constante.} \quad (9)$$

La ecuación 9 recibe el nombre de *ecuación de Bernoulli* para el flujo estacionario, incompresible, no viscoso y no rotatorio. Fue presentada por vez primera por Daniel Bernoulli en su *Hydrodynamica* en 1738.

La ecuación de Bernoulli es estrictamente aplicable únicamente al flujo estacionario, siendo evaluadas las cantidades implicadas a lo largo de la línea de corriente. En nuestra figura, la línea de corriente usada está a lo largo del eje de la tubería. Sin embargo, si el flujo es no rotatorio puede demostrarse (véase el problema 33 para un caso especial) que la constante de la ecuación 9 es la misma para *todas* las líneas de corrientes.

Así como la estática de una partícula es un caso especial de la dinámica de la partícula, la estática de los fluidos es un caso especial de la dinámica de los fluidos. No debería sorprendernos, por lo tanto, que la ley del cambio de la presión con la altura en un fluido en reposo esté incluida en la ecuación de Bernoulli como un caso especial. Si el fluido está en reposo, entonces  $v_1 = v_2 = 0$  y la ecuación 8 se convierte en

$$p_1 + \rho g y_1 = p_2 + \rho g y_2$$

o

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1),$$

que es la misma que la ecuación 8 del capítulo 17.

De la ecuación 8 se deduce otro resultado básico cuando  $y_1 = y_2$  (es decir, la tubería es horizontal, de modo que no es preciso considerar los efectos gravitatorios). Entonces

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2. \quad (10)$$

Cuando la velocidad es grande, la presión debe ser pequeña, y a la inversa. Éste es el postulado matemático que confirma la conclusión de lo expuesto como consecuencia de la ecuación 4. En la ecuación 9 todos los términos tienen la dimensión de una presión (lo cual debe usted verificar). La presión  $p + \rho g y$ , la cual estaría presente aun cuando no hubiese flujo ( $v = 0$ ), se llama *presión estática*; el término  $\frac{1}{2}\rho v^2$  se denomina *presión dinámica*.

La ecuación de Bernoulli es en efecto un postulado de la conservación de la energía mecánica en un sistema. En analogía con nuestro tratamiento de la conservación de la energía en el capítulo 8, podemos reescribir la ecuación 7 como:

$$\Delta K + \Delta U = W,$$

donde los tres términos se refieren, respectivamente, a los cambios en las energías cinética y potencial y al trabajo efectuado por la fuerza de la presión, siendo consideradas

todas las cantidades por unidad de volumen del fluido. Si el fluido es compresible, puede adquirir energía interna por medios mecánicos; por ejemplo, la fuerza de la presión puede empujar a las moléculas acercándolas más, aumentando por lo tanto su energía potencial interna. Entonces en un fluido compresible deberíamos incluir otro término  $\Delta E_{\text{int}}$  correspondiente al cambio en la energía interna por unidad de volumen, y el postulado de la conservación de la energía se convierte en

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = W.$$

Este resultado es idéntico a la ecuación 28 del capítulo 8. Si, además, el flujo es viscoso, las fuerzas similares a la fricción realizan un trabajo que puede parecer como un aumento en la energía interna del fluido.

En la práctica, podemos modificar a la ecuación de Bernoulli como sea necesario para justificar la conversión de la energía mecánica del fluido en energía interna. Si el flujo puede considerarse como aproximadamente incompresible y no viscoso, estas correcciones son despreciables.

**Problema muestra 2** Un tanque elevado de altura  $h = 32$  m y diámetro  $D = 3.0$  m abastece de agua a una casa (Fig. 8). Una tubería horizontal en la base del tanque tiene un diámetro  $d = 2.54$  cm (1 in, típico de las tuberías de abastecimiento doméstico en Estados Unidos). Para satisfacer las necesidades del hogar, la tubería de abastecimiento debe ser capaz de sustituir agua a razón de  $R = 0.0025$  m<sup>3</sup>/s (alrededor de  $\frac{2}{3}$  de galón por segundo). (a) Si el agua estuviese fluyendo a la cantidad máxima, ¿cuál sería la presión en la tubería horizontal? (b) Una tubería más pequeña, de diámetro  $d' = 1.27$  cm (= 0.5 in) abastece al segundo piso de la casa, a una distancia de 7.2 m sobre el nivel del suelo. ¿Cuáles son la velocidad del flujo y la presión del agua en esta tubería? Desprecie la viscosidad del agua.

**Solución** (a) Aplicamos la ecuación de Bernoulli a lo largo de la línea de flujo ABC mostrada en la figura 8. En los puntos A y B tenemos

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g y_A = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g y_B.$$

En A, la presión es la de la atmósfera,  $p_0$ . Con  $y_A = h$  y  $y_B = 0$ , obtenemos, para la presión desconocida,

$$p_B = p_0 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_B^2).$$

Podemos hallar  $v_A$  y  $v_B$  a partir de la igualdad del flujo volumétrico (Ec. 4), lo que nos da

$$v_A A_A = v_B A_B = R,$$

donde  $R$  es la cantidad de flujo volumétrico constante. Entonces

$$v_A = \frac{R}{A_A} = \frac{0.0025 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi(1.5 \text{ m})^2} = 3.5 \times 10^{-4} \text{ m/s},$$

$$v_B = \frac{R}{A_B} = \frac{0.0025 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi(0.0127 \text{ m})^2} = 4.9 \text{ m/s}.$$

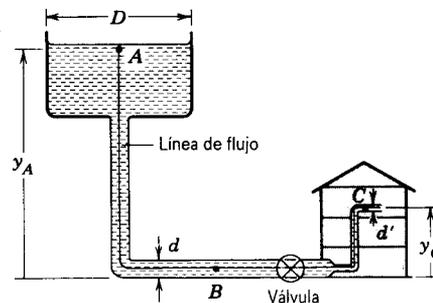


Figura 8 Problema muestra 2.

Obsérvese que el término  $\frac{1}{2}\rho v_A^2$  en la expresión para  $p$  es despreciable comparado con el término  $\frac{1}{2}\rho v_B^2$ . Esto es, la velocidad del flujo en la parte superior del tanque es bastante pequeña, debido a la gran área de su sección transversal.

Ahora podemos resolver para la presión en la tubería:

$$\begin{aligned} p_B &= p_0 + \rho g h - \frac{1}{2}\rho v_B^2 \\ &= 1.01 \times 10^5 \text{ Pa} + (1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(32 \text{ m}) \\ &\quad - \frac{1}{2}(1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(4.9 \text{ m/s})^2 \\ &= 1.01 \times 10^5 \text{ Pa} + 3.14 \times 10^5 \text{ Pa} - 0.12 \times 10^5 \text{ Pa} \\ &= 4.03 \times 10^5 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

Si el agua de la tubería horizontal no estuviese fluyendo (esto es, si la válvula estuviese cerrada), la presión *estática* en B incluiría únicamente a los primeros dos términos de arriba, lo cual daría  $4.15 \times 10^5$  Pa. La presión cuando el agua fluye se reduce de este valor estático a la cantidad de la presión dinámica.

(b) Si la tubería más angosta al segundo piso ha de tener la misma cantidad de flujo  $R$ , la velocidad en C debe ser

$$v_C = \frac{R}{A_C} = \frac{0.0025 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi(0.0064 \text{ m})^2} = 19.7 \text{ m/s},$$

o cuatro veces el valor en B. La ecuación de Bernoulli da

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g y_A = p_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2 + \rho g y_C$$

o

$$\begin{aligned} p_C &= p_0 + \frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_C^2) + \rho g(y_A - y_C) \\ &= 1.01 \times 10^5 \text{ Pa} - \frac{1}{2}(1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(19.7 \text{ m/s})^2 \\ &\quad + (1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(32 \text{ m} - 7.2 \text{ m}) \\ &= 1.01 \times 10^5 \text{ Pa} - 1.95 \times 10^5 \text{ Pa} + 2.43 \times 10^5 \text{ Pa} \\ &= 1.49 \times 10^5 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

A causa de la mayor velocidad del flujo a lo largo de la tubería más pequeña, la contribución dinámica a la presión es mucho mayor en C que en B. Los efectos tanto estáticos como dinámicos tienden a reducir la presión en ese punto con relación a B.

## 18-4 APLICACIONES DE LA ECUACIÓN DE BERNOULLI Y DE LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

En esta sección consideraremos un número de aplicaciones de la ecuación de Bernoulli, que ilustran su uso y demuestran la amplitud de su aplicabilidad.

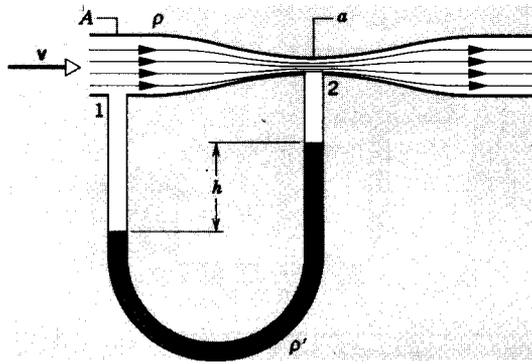


Figura 9 Un medidor de Venturi, usado para medir la velocidad del flujo de un fluido en una tubería.

### El medidor de Venturi

Este aparato (Fig. 9) es un medidor de la velocidad del flujo de un fluido en una tubería. Un fluido de densidad  $\rho$  fluye por una tubería de área de su sección transversal  $A$ . El área se reduce a  $a$  en el cuello, y allí se acopla un tubo manométrico, como se muestra. Hagamos que el líquido del manómetro, digamos mercurio, tenga una densidad  $\rho'$ . Al aplicar la ecuación de Bernoulli y la igualdad del flujo volumétrico en los puntos 1 y 2, puede demostrarse (véase el problema 31) que la velocidad del flujo en el punto 1 es

$$v = a \sqrt{\frac{2(\rho' - \rho)gh}{\rho(A^2 - a^2)}} \quad (11)$$

### El tubo de Pitot

Este aparato (Fig. 10) se usa para medir la velocidad del flujo de un gas. Consideremos que el gas (por ejemplo, aire) fluye con una densidad  $\rho$  y una velocidad  $v_a$  paralelas a los planos de las aberturas en  $a$ . La presión en el brazo izquierdo del manómetro, que está conectado a estas aberturas, es entonces la presión estática en la línea de gas,  $p_a$ . La abertura del brazo derecho del manómetro está en ángulo recto con la corriente. La velocidad se reduce a cero en  $b$ , y el gas está estancado en ese punto. Al aplicar la ecuación de Bernoulli a los puntos  $a$  y  $b$ , obtenemos

$$p_a + \frac{1}{2}\rho v_a^2 = p_b.$$

Sustituyendo la lectura  $\rho'gh$  del manómetro por la diferencia de presión  $p_b - p_a$ , podemos resolver para  $v_a$  y obtener

$$v_a = \sqrt{\frac{2gh\rho'}{\rho}} \quad (12)$$

Este aparato puede calibrarse para que dé una lectura de  $v_a$  directamente. El indicador de la velocidad del aire que

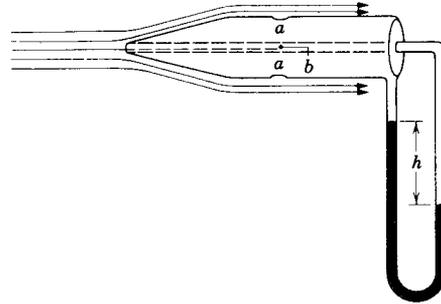


Figura 10 Tubo de Pitot, que se emplea para medir la velocidad del flujo de un gas.

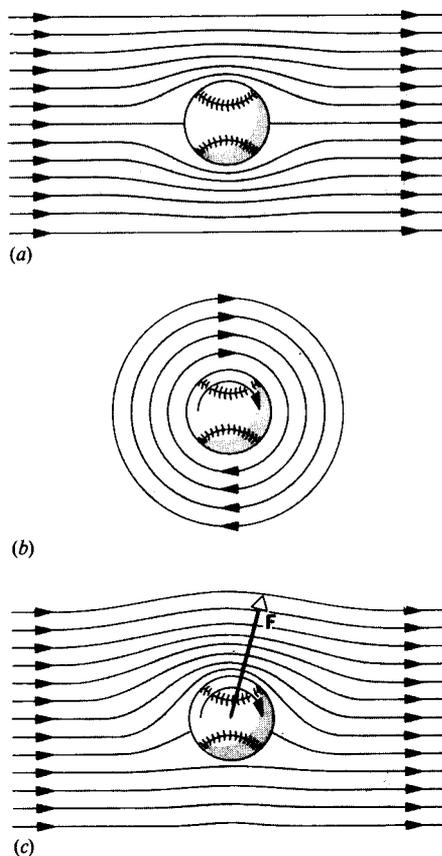
se encuentra en las puntas de las alas de un aeroplano se basa en este principio.

### La fuerza ascensional

Es la fuerza que actúa sobre un cuerpo, como puede ser el ala de un aeroplano, una hidroala, o las aspas de un helicóptero, en virtud de su movimiento en el seno del fluido. Ésta es distinta a la fuerza ascensional estática, que es la fuerza de flotabilidad que actúa sobre un globo o sobre un iceberg de acuerdo con el principio de Arquímedes (sección 17-4).

En el vuelo de una bola de béisbol, de una pelota de tenis, o de una pelota de golf tenemos ejemplos comunes de fuerza ascensional dinámica. Ésta, que se origina con la rotación de la pelota al volar, puede hacer que la pelota trace una curva o que ascienda o descienda con relación a una trayectoria parabólica. Puesto que el fluido (el aire en este caso) es un tanto viscoso, existe fricción a medida que la pelota avanza, y ésta tiende a transportar consigo una capa delgada de fluido llamada *capa frontera*. Vista desde el marco de reposo de una pelota que no gire, la velocidad del fluido desciende del valor más allá de la capa frontera (igual a la velocidad de vuelo de la pelota) a cero en la superficie de la pelota.

La figura 11a muestra, en el marco de reposo de la pelota, líneas de corrientes del flujo estacionario del aire al pasar por una pelota no rotatoria, a velocidades lo suficientemente bajas como para que no exista turbulencia. La figura 11b muestra las líneas de corriente de aire que acompañan a una pelota que gira rápidamente. Sin la viscosidad y sin la capa frontera, la bola, al girar, no puede transportar así aire a su alrededor y esta circulación (como se le llama) no existiría. Las pelotas de golf son sistemáticamente rugosas gracias a los hoyuelos que tienen para aumentar esta circulación y la fuerza ascensional dinámica que resulta de ello. Las bolas de béisbol a veces se raspan artificialmente (Lo cual no está permitido por las reglas del juego) por los lanzadores, por la misma razón.



**Figura 11** (a) Flujo de líneas de corriente alrededor de una pelota que no gira. (b) La circulación del aire alrededor de una pelota que gira, como consecuencia de la capa frontera. El espesor de la capa frontera se ha exagerado aquí a propósito. (c) Los efectos combinados de ambos movimientos. Partiendo de la ecuación de Bernoulli vemos que una fuerza ascensional dinámica actúa hacia arriba sobre la pelota. El fluido ejerce sobre la pelota una fuerza neta  $F$  que tiene una componente transversal al flujo del fluido (ascenso) y una componente paralela al flujo del fluido (arrastre).

La figura 11c muestra el efecto de combinar la circulación (resultante de la rotación de la pelota) y el flujo estacionario (resultante de la traslación de la pelota por el aire). En el caso mostrado, las dos velocidades se suman en la parte de arriba de la pelota y se restan en la parte de abajo. A partir del espaciado de las líneas de corriente resultantes, vemos que la velocidad del aire debajo de la pelota es menor que la de encima de ella. Según la ecuación de Bernoulli, la presión del aire debajo de la pelota debe entonces ser mayor que la de encima, de modo que la pelota experimenta una fuerza de sustentación dinámica.

Esencialmente, una bola de béisbol lanzada se curva en su trayectoria por la misma razón. Por ejemplo, si la figura 11 representa una vista desde arriba de la bola que

gira mientras avanza hacia el bateador, el “ascenso” actúa en dirección hacia un lado para mover a la bola horizontalmente hacia el bateador o alejándose de él, como en el caso de una bola curva. Si la figura 11 representa una vista lateral, la bola es lanzada con contragiro, como en el caso de una bola rápida. La fuerza ascensional actúa hacia arriba, provocando que la bola se eleve con relación a su trayectoria parabólica.

La fuerza de ascenso que actúa sobre el ala de un aeroplano tiene una explicación parecida. La figura 12 muestra las líneas de corriente alrededor de un plano aerodinámico (o sección transversal del ala) adosado a un aeroplano. Elijamos al aeroplano como marco de referencia, como haríamos en el experimento en un túnel de viento, y supongamos que el aire se mueve de izquierda a derecha al pasar por el ala. Obsérvense las similitudes entre las figuras 12 y 11c. (De hecho, la explicación de la fuerza ascensional sobre el ala de un aeroplano implica una circulación similar a la Fig. 11b.).

El ángulo de ataque del ala provoca que el aire se desvíe hacia abajo. De la tercera ley de Newton la reacción de esta fuerza hacia abajo del ala sobre el aire es una fuerza hacia arriba  $F$ , el ascenso, que el aire ejerce sobre el ala.

Si bien la sola ecuación de Bernoulli no puede servir para predecir el patrón de las líneas de corriente alrededor de un plano aerodinámico, esta ecuación puede emplearse para verificar que sobre el plano aerodinámico se ejerce una fuerza de ascenso. Encima del ala (punto 1) las líneas de corriente están más cerca entre sí que lo están debajo del ala (punto 2). Entonces  $v_1 > v_2$  y, según el principio de Bernoulli,  $p_1 < p_2$ , lo que debe ser así para que exista elevación.\*

## Empuje sobre un cohete

Como ejemplo final calculemos el empuje sobre un cohete producido por el escape de los gases que expele. Consideremos una cámara (Fig. 13) de sección transversal  $A$  llena de un gas de densidad  $\rho$  a una presión  $p$ . En el fondo de la cámara se encuentra un pequeño orificio de área de

\* Para mayor información sobre cómo vuelan los aeroplanos, véase “The Science of Flight”, por Peter P. Wegener, *American Scientist*, mayo-junio de 1986, pág. 268. Véase también “Bernoulli’s Law and Aerodynamic Lifting Force”, por Klaus Weltner, *The Physics Teacher*, febrero de 1990, pág. 84. La fuerza ascensional dinámica se trata en “Physics and Sports: The Aerodynamics of Projectiles”, por Peter J. Brancazio, en *Fundamentals of Physics*, 3a. edición, por David Halliday y Robert Resnick (Wiley, 1988). La fuerza ascensional dinámica puede emplearse también para proveer una fuerza horizontal que impulse a un navío; véase “The Flettner Ship”, por Albert Einstein, en *Essays in Science* (Philosophical Library, 1955), pág. 92.